Лекция 2. Методы численного дифференцирования. Алгоритмы методов Эйлера, модифицированного и усовершенствованного методов Эйлера, метода Рунге-Кутта 4-го порядка.

Общий вид дифференциального уравнения

$F(x,y,y',y'' \ldots y^n)=0$ – ДУ n-го порядка

ДУ 1-го порядка

$$y' = f(x, y);$$

Пример:

$y = x^2 + 10x + 2$

$y' = 2x + 10$

Задача дифференцирования

Нахождение исходной функции если известна ее производная

Задавая начальные условия, можно однозначно определить конкретную функцию из семейства функций.

Для этого достаточно знать значение исходной искомой функции в одной точке y(x0) = y0

Через известную нам точку может проходить только одна функция из известного нам семейства функций

Численное дифференцирование

Задача численного дифференцирования – нахождение точек исходной функции y=f(x) если известна ее производная y’=f(x,y)

При численном дифференцирование необходимо знать:

- производную y’=f(x,y)
- начальное условие y(x0)=y0
- шаг дифференцирования h
- кол-во искомых точек или отрезков диф-ия

Метод Эйлера

МЭ – одноступенчатый метод, каждая следующая точка находится только на основе предыдущей точки

Алгоритм Эйлера

1. задать шаг h и отрезок дифференцирования [a,b]
2. задать начальные условия y(x0) = y0
3. Нахождение следующей точки:
    1. y[i+1] = y[i] + h*f(x[i], y[i])
    2. x[i+1] = x[i] + h;

Модифицированный метод Эйлера

Метод использует промежуточную точку на половинном шаге и вторую производную $y''=f'(x,y)$. При этом погрешность вычислений уменьшается

Алгоритм Модифицированного метода Эйлера

1-2 аналогичны

3. Нахождение точек:

   x* = x[i] + h/2;

   y* = y[i] + h/2*f’(x[i],y[i])

   y[i+1] = y[i] + h*f(x*,y*)

   x[i+1] = x[i] + h

Усовершенствованный метод Эйлера

Метод использует коррекцию без использования половинного шага. Коррекция на шаге h за счет второй производной $y''=f'(x,y)$

Алгоритм усовершенствованного метода Эйлера

- 1-2 аналогичны
- Нахождение точек:
  - y* = y[i] + h * f’(x[i], y[i])
  - x[i+1] = x[i] + h
  - y[i+1] = y[i] + h*(f(x[i],y[i] + f(x[i+1],y*))/2

Алгоритм метод Рунге-Кутта

1-2 аналогичны

k1 = f(x[i], y[i])

k2 = f(x[i] + h/2, y[i] + k1/2)

k3 = f(x[i] + h/2, y[i] + k2/2)

k4 = f(x[i] + h, y[i] + k3)

y[i+1] = y[i] + h*(k1+2*k2+2*k3+k4)/6

x[i+1] = x[i] + h