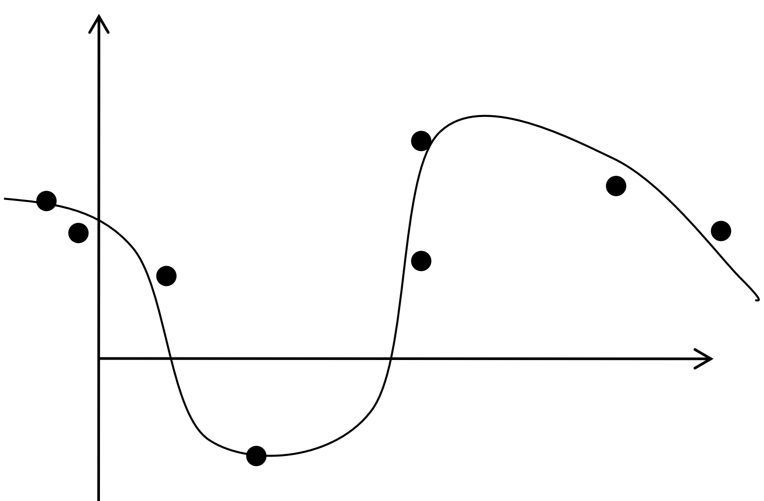
Лекция 4. Метод наименьших квадратов

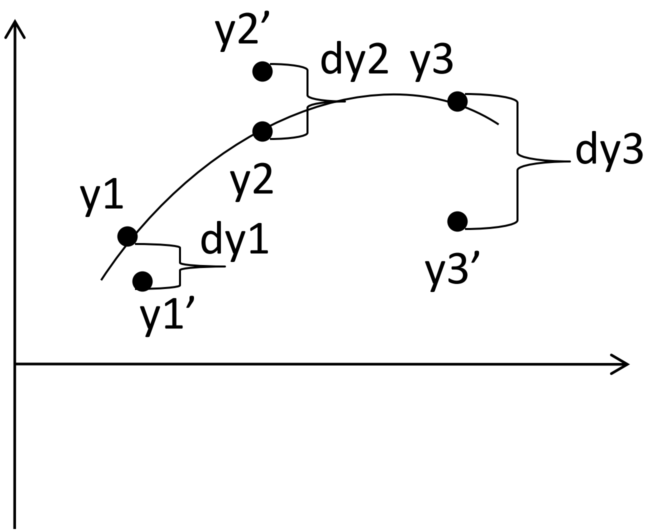
МНК используется в случае необходимости выразить в виде функции связь между величинами, которые заданы в виде набора точек с координатами (x,y)

Цели нахождения кривой

- Сгладить отклонения, обусловленные ошибками
- интерполировать промежуточные значения
- экстраполировать участки без экспериментальных данных



Пример



y1-y3 – расчетные точки
y1’-y3’ – экспериментальные точки
(y[i]’ – y[i])^2 – квадрат ошибки

Необходимо выбрать критерии, согласно которым та или иная кривая является наиболее близким приближением к исходной информации (к эксперименту)

Критерий – сумма всех квадратичных ошибок должна быть минимальной:

$R = \Sigma(y[i]'-y[i])^2 \longrightarrow \min$

Пример

Предположим, что наша искомая зависимость описывается уравнением $y[i] = a0 + a1x[i] + a2x[i]^2$

Выбор уравнения зависит от расположения исходных точек. Оценка типа зависимости происходит аналитически, а после расчета значения R возможно сделать вывод о том, верно ли была определена зависимость.

Пример

Для выбранной зависимости необходимо найти коэффициенты a0, a1, a2, они должны быть такими, чтобы $R \longrightarrow \min$

$$R = \Sigma(y[i]' - y[i])^2 = \Sigma(y[i]' - a0 - a1x[i] - a2x[i]^2)^2 \quad R \longrightarrow \min$$

Правила сумм

1. Σ(x[i] + y[i]) = Σx[i] + Σy[i]
2. Σax[i] = a Σx[i], где a – численная константа
3. $$\frac{d\sum \mathrm{f(x)}}{dx} = \sum \frac{df(x)}{dx}$$.
4. Σa = aN

Для того, чтобы найти такие a0, a1, a2, чтобы R -> min нужно найти «нули» первых производных по a0,a1,a2:

dR/da0 = 0; dR/da1 = 0; dR/da2 = 0

dR/da0 = d(Σ(y[i]’-a0-a1x[i]-a2x[i]^2)^2)/da0 = Σd(y’[i] – a0 – a1x[i] – a2x[i]^2)^2 = -2 Σ(y’[i] – a0-a1x[i]-a2x[i]^2)

Система уравнений

- $dR/da0 = -2 \Sigma(y'[i] - a0 - a1x[i] - a2x[i]^2) = 0$
- $dR/da1 = -2 \Sigma((y'[i] - a0 - a1x[i] - a2x[i]^2)x[i]) = 0$
- $dR/da2 = -2 \Sigma((y'[i] - a0 - a1x[i] - a2x[i]^2)x[i]^2) = 0$

Применяем правило (1)

$\Sigma y'[i] - \Sigma a0 - \Sigma a1x[i] - \Sigma a2x[i]^2 = 0$

$\Sigma y'[i]x[i] - \Sigma a0x[i] - \Sigma a1x[i]^2 - \Sigma a2x[i]^3 = 0$

$\Sigma y'[i]x[i]^2 - \Sigma a0x[i]^2 - \Sigma a1x[i]^3 - \Sigma a2x[i]^4 = 0$

применяем правило (2)

$\Sigma y'[i] = a0N + a1 \Sigma x[i] + a2 \Sigma x[i]^2$

$\Sigma(y'[i]x[i]) = a0 \Sigma x[i] + a1 \Sigma x[i]^2 + a2 \Sigma x[i]^3$

$\Sigma(y'[i]x[i]^2) = a0 \Sigma x[i]^2 + a1 \Sigma x[i]^3 + a2 \Sigma x[i]^4$

Упрощение системы

$S0 = \Sigma x[i]$

$S1 = \Sigma x[i]^2$

$S2 = \Sigma x[i]^3$

$S3 = \Sigma x[i]^4$

$Sn = \Sigma x[i]^{(n+1)}$

$Sy0 = \Sigma y'[i]$

$Sy1 = \Sigma y'[i]x[i]$

$Sy2 = \Sigma y'[i]x[i]^2$

$Syn = \Sigma y'[i]x[i]^n$

Конечная система

a0N + a1S0 + a2S1 = Sy0

a0S0 + a1S1 + a2S2 = Sy1

a0S1 + a1S2 + a2S3 = Sy3

Полученная система уравнений решается методом Гаусса относительно a0, a1, a2