

Лекция 5. Методы решения систем
линейных алгебраических уравнений.

Алгоритмы методов: Гаусса и
Гаусса-Зейделя.

Определения, понятия, обозначения

$$A = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \dots + a_{pn}x_n = b_p \end{cases}$$

Основная
матрица
системы

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Матрица
столбец
неизвестных
переменных

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Матрица
столбец
свободных
членов

Решение СЛАУ

- **Решением системы линейных алгебраических уравнений** называют набор значений неизвестных переменных $x_1 = a_1, a_2 = a_2 \dots x_n = a_n$, обращающий все уравнения системы в тождества. Матричное уравнение $AX = B$ при данных значениях неизвестных переменных также обращается в тождество .
- Если система уравнений имеет хотя бы одно решение, то она называется **совместной**.
- Если система уравнений решений не имеет, то она называется **несовместной**.
- Если СЛАУ имеет единственное решение, то ее называют **определенной**; если решений больше одного, то – **неопределенной**.
- Если свободные члены всех уравнений системы равны нулю , то система называется **однородной**, в противном случае – **неоднородной**.

Решение СЛАУ методом Гаусса

Этапы:

1. Необходимо сделать единицы на главной диагонали и нули ниже главной диагонали;
2. Обратная подстановка (для системы 3x3):
 1. $x_2 = b_2$
 2. $x_1 = (b_1 - a_{12} * x_2) / a_{11}$
 3. $x_0 = (b_0 - a_{01}x_1 - a_{02}x_2) / a_{00}$

Решение СЛАУ методом Гаусса

Алгоритм

1. Проверить условие $a_{00} \neq a_{11} \neq a_{22} \neq 0$, в случае необходимости поменять строки местами;
2. Составить матрицу коэффициентов уравнения;
3. цикл по i
 - запомнить значение a_{ii}
 - в цикле, разделить i -ю строку на значение a_{ii}
 - цикл по k (индекс строк ниже i -ой строки)
 - запомнить значение a_{ki}
 - в цикле, домножить i -ю строку на значение $-a_{ki}$ и сложить с k -ой строкой
4. Обратная подстановка (расчет по уравнениям)
5. Проверка решения, подстановка полученных результатов в исходную систему уравнений

Метод Гаусса - Зейделя

Алгоритм

1-2 пункты аналогичны

3. Объявить векторы решений `old_x` и `new_x`;

4. Переприсваивание векторов (`old_x = new_x`);

5. Вычислить новые значения вектора `new_x`

$$\text{new_x}[0] = (a_{03} - a_{01} * \text{old_x}[1] - a_{02} * \text{old_x}[2]) / a_{00}$$

$$\text{new_x}[1] = (a_{13} - a_{10} * \text{new_x}[0] - a_{12} * \text{old_x}[2]) / a_{11}$$

$$\text{new_x}[2] = (a_{23} - a_{20} * \text{new_x}[0] - a_{21} * \text{new_x}[1]) / a_{22}$$

6. Найти массив погрешностей `error`

$$\text{error}[i] = \text{fabs}((\text{new_x}[i] - \text{old_x}[i]) / \text{new_x}[i])$$

7. Найти максимальное значение погрешностей `MAX`

8. Повторять пункты 4-7, если `MAX > E`