Лабораторная работа №1

ПОЛУЧЕНИЕ УРАВНЕНИЯ КРИВОЙ РАЗГОНА

Цель работы: решить аналитическим методом и с использованием метода преобразования Лапласа неоднородные дифференциальные уравнения первого и второго порядков и получить уравнение кривой разгона:

$$A\frac{dy}{dt}+By=Ct+D,\quad y|_{t=0}=0;\qquad A_1\frac{d^2y}{dt^2}+B_1\frac{dy}{dt}+C_1y=D_1,\quad y|_{t=0}=0,\quad \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0}=0,$$

где A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1, – постоянные коэффициенты, (выбираются из табл. 1).

1.1 Теоретические сведения

Кривая разгона является одной из основных динамических характеристик систем управления. Уравнение кривой разгона может быть получено экспериментальным путем (если это не противоречит функционированию исследуемого объекта) или путем решения дифференциального уравнения, которое описывает динамику объекта.

Поведение систем автоматического регулирования (САР) в процессе функционирования представляет собой сочетание статических и динамических режимов. Для проведения теоретических исследований САР и её отдельных элементов необходимо иметь уравнения, описывающие их поведение при изменяющихся внешних воздействиях. Эти уравнения представляют собой выраженные в математической форме соотношения, связывающие входные и выходные сигналы и воздействия.

В общем случае действие непрерывной линейной САР описывается неоднородным дифференциальным уравнением вида:

$$a_0\frac{d^ny}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\ldots+a_ny=b_0\frac{d^mx}{dt^m}+b_1\frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}}+\ldots+$$
$$+b_mx+c_0\frac{d^kz}{dt^k}+c_1\frac{d^{k-1}z}{dt^{k-1}}+\ldots+c_kz,$$

где a, b, c – постоянные коэффициенты, зависящие от параметров системы.

Решение неоднородных дифференциальных уравнений складывается из решения однородного дифференциального уравнения $y_о$ и частного решения $y_ч$: $y=y_о+y_ч$.

Для решения однородного дифференциального уравнения составляется характеристическое уравнение, и находятся его корни, далее, в зависимости от полученных значений (табл. 2) записывается общее решение. Частное решение получается в результате решения правой части дифференциального уравнения методом неопределенных коэффициентов.

В теории автоматического регулирования широко используется специальный метод прикладного анализа, в основе которого лежит функциональное преобразование Лапласа. Преобразование Лапласа служит для перехода от функции вещественного переменного – время, к функции комплексного переменного.

Преобразованной по Лапласу функцией называется функция комплексного переменного, определяемого соотношением: $F(p)=\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$, где $f(t)$ – исходная функция действительного переменного t, называемая оригиналом; p – комплексная переменная, $p=\alpha+j\omega$; α, ω – действительные переменные; $j=\sqrt{-1}$; $F(p)$ – функция комплексного переменного, называемая изображением по Лапласу функции $f(t)$.

Иначе это можно записать в виде: $L\{f(t)\}=F(p)$, где L – символ преобразования Лапласа.

Обратный переход от изображения к оригиналу осуществляется по формуле $f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int\limits_{c-j\infty}^{c+j\infty}F(p)e^{pt}dp$, где c – абсцисса сходимости функции $f(t)$.

Использование преобразования Лапласа объясняется рядом преимуществ этого метода перед прямым решением задач в области действительного переменного. В частности, изображения некоторых функций оказываются проще их оригиналов.

Для нахождения изображения от производных используют правило дифференцирования: операция дифференцирования функции вещественного переменного соответствует операция умножения изображения функции на комплексную переменную в соответствующей степени:

$$f(t)=F(p),$$
$$f'(t)=F(p)p^1,$$
$$f''(t)=F(p)p^2,$$
$$\ldots\ldots\ldots,$$
$$f^{(n)}(t)=F(p)p^n.$$

Использование преобразования Лапласа для решения дифференциальных уравнений упрощает решение, благодаря тому, что в области комплексного переменного дифференциальное уравнение преобразуется в алгебраическое, а оригиналы найденного решения легко определяются по табл. 3.

Решение дифференциального уравнения с применением преобразования Лапласа складывается из трех этапов:

1) преобразование уравнения по Лапласу с использованием правила дифференцирования;

2) отыскание решения в области комплексного переменного;

3) переход в область действительного переменного путем обратного преобразования по Лапласу функции и отыскание ее оригинала.

1.2 Примеры расчета

Пример 1. Решить неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка $15\frac{dy}{dt}+2y=3t+4$, с начальным условием: $y|_{t=0}=0$.

Алгоритм метода преобразования Лапласа

1. Преобразуем по Лапласу левую и правую части уравнения с учетом линейности этой операции, правил преобразования производных и изображения единичной функции, получим:

$$15py(p)+2y(p)=\frac{3}{p^2}+\frac{4}{p}.$$

2. Решение этого уравнения в операторной форме: $y(p)=\frac{3+4p}{p^2(15p+2)}$.

3. Раскладываем полученное уравнение на простейшие дроби: $y(p)=\frac{C_1p+C_2}{p^2}+\frac{C_3}{15p+2}$, откуда $p_1=-\frac{2}{15}$, $p_2=p_3=0$. Постоянные C_1, C_2, C_3находятся методом неопределенных коэффициентов из уравнений:

$$(C_1p+C_2)(15p+2)+C_3p^2=3+4p,$$

$15C_1p^2+2C_2+15C_2p+2C_1p+C_3p^2=3+4p$, откуда $\begin{cases}15C_1+C_3=0,\\ 2C_1+15C_2=4,\\ 2C_2=3,\end{cases}$

Решив полученную систему уравнений относительно C_1, C_2, C_3, получим следующие значения $C_2 = \frac{3}{2}$, $C_1 = -\frac{37}{4}$, $C_3 = 15\frac{37}{4}$.

4. Подставляя вычисленные значения, получим:

$$y(p) = \frac{-\frac{37}{4}p + \frac{3}{2}}{p^2} + \frac{15\frac{37}{4}}{15p+2} = -\frac{37}{4p} + \frac{3}{2p^2} + 15\frac{37}{8}\cdot\frac{1}{\frac{15}{2}p+1}.$$

5. По табл. 3 производим обратное преобразование Лапласа и находим оригинал $y(t) = -\frac{37}{4} + \frac{3}{2}t + 9{,}25e^{-\frac{2t}{15}}$.

Пример 2. Решить неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка $15\frac{d^2y}{dt^2} + 12\frac{dy}{dt} + 4y = 8$, с начальными условиями: $y\big|_{t=0} = 0$, $\frac{dy}{dt}\Big|_{t=0} = 0$.

Алгоритм метода преобразования Лапласа

1. Преобразуем по Лапласу левую и правую части уравнения с учетом линейности этой операции, правил преобразования производных и изображения единичной функции, получим:

$$15p^2y(p) + 12py(p) + 4y(p) = \frac{8}{p}.$$

2. Решение этого уравнения: $y(p) = \frac{8}{p(15p^2+12p+4)}$.

3. Преобразуем полученное уравнение к виду $y(p) = \frac{1}{p(T^2p^2 + 2\xi Tp + 1)}$.

$$y(p) = \frac{2}{p\left(\frac{15}{4}p^2 + 3p + 1\right)} = \frac{2}{p\left(\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2 p^2 + 2\cdot\frac{\sqrt{15}}{2}\cdot\frac{3}{\sqrt{15}}p + 1\right)},$$

т.е. $T = \frac{\sqrt{15}}{2}$, $\xi = \frac{3}{\sqrt{15}}$.

4. По табл. 3 производим обратное преобразование Лапласа при $\gamma = \frac{6}{15}$, $\lambda = \frac{2\sqrt{6}}{15}$, $C = \sqrt{\frac{15}{6}}$, $\theta = \mathrm{arctg}\frac{2}{\sqrt{6}}$ оригинал функции: $y(t) = 2\left(1 - \sqrt{\frac{15}{6}}e^{-\frac{6}{15}t}\sin\left(\frac{2\sqrt{6}}{15}t + \mathrm{arctg}\frac{2}{\sqrt{6}}\right)\right)$.

5. График *y(t)* при *t* =[0; 16] с шагом 1 на рисунке.

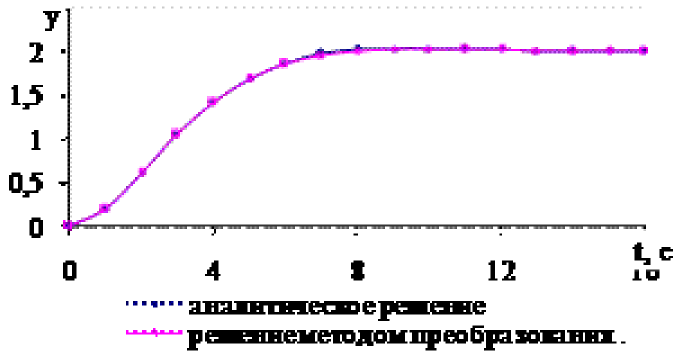

Рисунок 1. Решение дифференциального уравнения II-ого порядка.

Таблица 1

Численные значения коэффициентов дифференциальных уравнений

№ вар.	***A***	***B***	***C***	***D***	A_1	B_1	C_1	D_1	№ вар.	***A***	***B***	***C***	***D***	A_1	B_1	C_1	D_1
1	5	7	3	16	1	6	8	8	10	20	4	9	4	1	2	2	10
2	10	6	5	12	1	6	5	15	11	25	3	11	20	1	-2	1	1
3	15	5	7	8	1	4	5	20	12	30	2	13	24	1	0	-1	1
4	20	4	9	4	1	-3	2	2	13	20	4	9	4	1	-5	6	4
5	25	3	11	20	1	0	9	18	14	25	3	11	20	1	3	2	6
6	30	2	13	24	1	0	1	5	15	15	5	7	8	1	-2	2	10
7	5	7	3	16	1	-1	-2	4	16	20	5	7	10	1	-1	0	3
8	10	6	5	12	1	2	1	2	17	10	2	7	9	1	3	0	7
9	15	5	7	8	1	-2	5	1	18	3	16	5	7	1	-2	1	4

Таблица 2

Методика решения однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами типа $\frac{d^2y}{dt^2}+p\frac{dy}{dt}+qy=0$

<table>
<tr><th>Алгоритм действий</th><th>Корни характеристического уравнения</th><th>Вид общего решения</th></tr>
<tr><td rowspan="4">1. В уравнении $\frac{d^2y}{dt^2}+p\frac{dy}{dt}+qy=0$ заменить $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{dy}{dt}$, и y соответственно на k^2, k^1 и $k^0 = 1$
2. Составить характеристическое уравнение $k^2+pk+q=0$
3. Найти корни характеристического уравнения: k_1, k_2
4. Записать общее решение дифференциального уравнения в зависимости от характера корней характеристического уравнения</td><td>1. k_1, k_2 – действительные числа, $k_1 \neq k_2$</td><td>$y_0 = C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}$</td></tr>
<tr><td>2. k_1, k_2 – действительные числа, равные $k_1 = k_2 = k$</td><td>$y_0 = e^{kx}(C_1+C_2x)$</td></tr>
<tr><td>3. k_1, k_2 – комплексные числа, равные $k_1 = \alpha + \beta i$; $k_2 = \alpha - \beta i$</td><td>$y_0 = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x +$
$+C_2\sin\beta x)$</td></tr>
<tr><td>4. k_1, k_2 – мнимые числа, равные
$k_1 = \beta i$; $k_2 = -\beta i$</td><td>$y_0 = C_1\cos\beta x +$
$+C_2\sin\beta x$</td></tr>
</table>

Таблица 3

Изображение по Лапласу и оригиналы

Изображение $L\{f(t)\}$	Оригинал $f(t)$	Изображение $L\{f(t)\}$	Оригинал $f(t)$
1	$\delta(t)$	$\frac{1}{p(Tp+1)}$	$1-e^{-\frac{t}{T}}$
$\frac{1}{p}$	$1(t)$	$\frac{1}{T^2p^2+1}$	$\frac{1}{T}\sin\frac{1}{T}t$
$\frac{1}{p^2}$	$t\cdot 1(t)$	$\frac{1}{p(T^2p^2+1)}$	$1-\cos\frac{1}{T}t$
$\frac{1}{Tp+1}$	$\frac{1}{T}\cdot e^{-\frac{t}{T}}$	$\frac{1}{(T_1p+1)(T_2p+1)}$	$\frac{1}{T_1-T_2}\left(e^{-\frac{t}{T_1}}+e^{-\frac{t}{T_2}}\right)$

Изображение $L\{f(t)\}$	Оригинал $f(t)$
$\frac{1}{p(T_1p+1)(T_2p+1)}$	$1+\frac{T_1}{T_2-T_1}e^{-\frac{t}{T_1}}+\frac{T_2}{T_1-T_2}e^{-\frac{t}{T_2}}$
$\frac{1}{T^2p^2+2\xi Tp+1}$	$C\cdot e^{-\gamma t}\sin\lambda t$, $\lambda=\frac{1}{T}\sqrt{1-\xi^2}$, $C=\frac{1}{\lambda T^2}$, $\gamma=\frac{\xi}{T}$
$\frac{1}{p(T^2p^2+2\xi Tp+1)}$	$1-C\cdot e^{-\gamma t}\sin(\lambda t+\theta)$, $\gamma=\frac{\xi}{T}$, $\lambda=\frac{1}{T}\sqrt{1-\xi^2}$, $C=\frac{1}{\lambda T}$, $\theta=\mathrm{arctg}\,\frac{\lambda}{\gamma}$
$\frac{1}{p}e^{-\tau p}$	$1(t-\tau)$