Лабораторная работа №3

Частотные характеристики САУ

Цель работы: по известному дифференциальному уравнению $A\frac{d^2y}{dt^2} + B\frac{dy}{dt} + Cy = Dt + E$ где *A, B, C, D, E,* – постоянные коэффициенты, (выбираются из табл. 1). получить передаточную функцию объекта; по передаточной функции получить аналитические выражения для всех частотных характеристик объекта; построить графики частотных характеристик.

1.1 Теоретические сведения

Частотные характеристики описывают передаточные свойства САУ и её элементов в режиме установившихся гармонических колебаний, вызванных внешним гармоническим воздействием. Зная частотные характеристики элемента или системы, можно определить их реакцию на гармонические воздействия различных частот.

Частотные характеристики широко используются в теории и практике автоматического управления, что обусловлено следующими причинами:

- реально встречающиеся воздействия, как правило, могут быть представлены в виде суммы гармоник различных частот на основе преобразования Фурье;
- в установившемся режиме гармонические сигналы передаются линейными системами без искажения;
- не возникает затруднений в экспериментальном исследовании поведения систем при гармонических входных воздействиях.

Рассмотрим физическую сущность и разновидности частотных характеристик.

Пусть на вход линейного элемента в момент времени t = 0 подано гармоническое воздействие $g(t)$ (рис. 1) определённой частоты ω, то есть $g(t) = Asin(\omega t + \varphi)$, где A – амплитуда гармонического воздействия; φ – фаза гармонического воздействия; ω – частота гармонического воздействия, ω =2π/T, где T – период гармонического воздействия.

Через некоторое время, необходимое для протекания переходного процесса, элемент войдёт в режим установившихся вынужденных колебаний, а выходная величина $y(t)$ будет изменяться по гармоническому закону с той же частотой ω, но с другими амплитудой *B* и фазой ψ (рис. 1)., т.е. $y(t) = Bsin(\omega t + \psi)$/

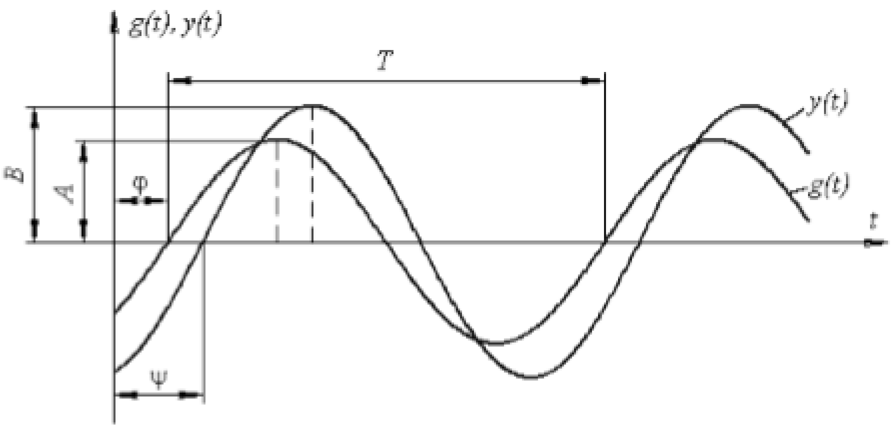

Рисунок 1. Входное и выходное гармонические воздействия

Повторяя такой эксперимент при фиксированной амплитуде *A* для различных значений частоты ω (от 0 до +∞), можно установить, что амплитуд
от частоты входного воздействия. Следовательно, зависимости амплитуды *B* и фазы φ от частоты ω могут служить характеристиками динамических свойств элементов (системы).

Изменение амплитуды *B* и фазы φ определяется не только изменениями частоты, но и характеристиками рассматриваемого элемента (видом дифференциального уравнения и его параметрами), а амплитуда ещё и амплитудой входного воздействия *A*.

Зависимость отношения амплитуд *B/A* выходного и входного сигналов от частоты называется амплитудной частотной функцией $A(\omega)$, а её график при изменении частоты ω от 0 до +∞ называется амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ). АЧХ показывает как элемент или система пропускают сигналы различной частоты. Причём оценка пропускания осуществляется по соотношению амплитуд *B/A*. АЧХ имеет размерность, равную отношению размерности выходной величины к размерности входного воздействия.

Зависимость фазового сдвига $\Delta\varphi = \psi - \varphi$ между выходным и входным сигналами от частоты называется фазовой частотной функцией φ (ω), а её график фазово-частотной характеристикой (ФЧХ). ФЧХ показывает какое отставание или опережение по фазе создаёт элемент при различных частотах.

Обобщением понятий $A(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ является амплитуднофазовая частотная функция (частотная передаточная функция) $W(j\omega)$, которая характеризует изменение амплитуды и фазы выходной величины системы в установившемся режиме при приложении на вход гармонического воздействия. График частотной передаточной функции $W(j\omega)$ при изменении частоты ω от 0 до +∞ называется амплитудно-фазовой частотной характеристикой (АФЧХ).

Частотная передаточная функция $W(j\omega)$ получается с помощью преобразования Фурье, являющегося частным случаем преобразования Лапласа при $p = j\omega$, то есть

$$X(j\omega) = \int_0^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

На практике $W(j\omega)$ получают путём замены в передаточной функции:

$$W(p) = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \ldots + b_{m-1}p + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1}p + a_n}$$

p на $j\omega$.

АФЧХ представляется на комплексной плоскости. Пример АФЧХ приведен на рисунке 2. Он показывает, что АФЧХ представляет собой годограф, определяющий геометрическое место точек для вектора с модулем $A(\omega)$ при изменении частоты ω от 0 до +∞.

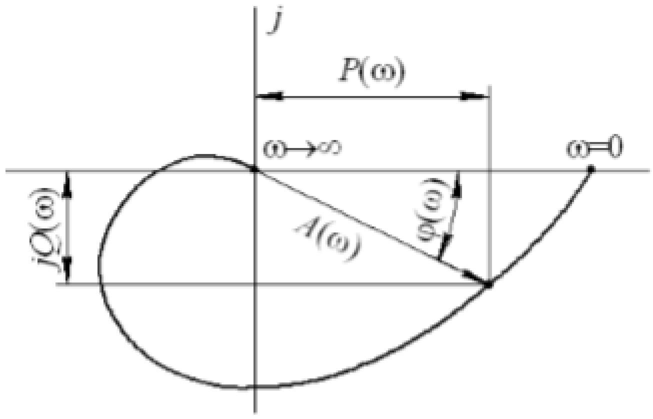

Рисунок 2. *Амплитудно-фазовая частотная характеристика*

В соответствии с формулой Эйлера:

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = P(\omega) + jQ(\omega),$$

где $P(\omega)$ – вещественная частотная функция; $Q(\omega)$ – мнимая частотная функция.

График функции $P(\omega)$ при изменении частоты ω от 0 до +∞ называется вещественной частотной характеристикой (ВЧХ), а график

$$A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)},$$

$$\varphi(\omega) = arctg\frac{Q(\omega)}{P(\omega)},$$

$$P(\omega) = A(\omega)\cos\varphi(\omega), \qquad Q(\omega) = A(\omega)\sin\varphi(\omega).$$

функции $Q(\omega)$ – мнимой частотной характеристикой (МЧХ).

Основным достоинством частотных характеристик является то, что они без решения дифференциальных уравнений позволяют судить о поведении системы: оценивать устойчивость САУ; определять показатели качества; рассчитывать средства коррекции систем для получения заданных показателей качества.

1.2 Пример расчёта и построения частотных характеристик

Дана передаточная функция САУ

$$W(p) = \frac{10p+10}{6p^2+5p+1}.$$

Получим частотную передаточную функцию $W(j\omega)$, заменив p на $j\omega$:

$$W(j\omega) = \frac{10+j10\omega}{1-6\omega^2+j5\omega}.$$

Получим выражения для расчёта ВЧХ $P(\omega)$ и МЧХ $Q(\omega)$. Для этого необходимо освободиться от мнимой единицы в знаменателе. Так как $(a+jb)(a-jb)=a^2+b^2$, то, умножив числитель и знаменатель на комплексно-сопряжённый знаменатель, освободимся от мнимости в знаменателе:

$$W(j\omega) = \frac{10+j10\omega}{1-6\omega^2+j5\omega}\cdot\frac{1-6\omega^2-j5\omega}{1-6\omega^2-j5\omega} =$$

$$= \frac{10-60\omega^2+50\omega^2-j50\omega+j10\omega-j60\omega^3}{(1-6\omega^2)^2+25\omega^2} =$$

$$= \frac{10-10\omega^2-j(60\omega^3+40\omega)}{1+13\omega^2+36\omega^4}$$

После преобразований можно записать:

$$W(j\omega) = \frac{10-10\omega^2}{1+13\omega^2+36\omega^4} + j\frac{-\omega(60\omega^2+40)}{1+13\omega^2+36\omega^4}.$$

АЧХ $A(\omega)$ и ФЧХ $B(\omega)$ определяются на основе $P(\omega)$ и $Q(\omega)$.

Таблица 1

Численные значения коэффициентов дифференциальных уравнений

№ вар.	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	№ вар.	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*
1	5	7	3	6	1	10	20	4	9	4	1
2	10	6	5	2	1	11	5	3	11	2	3
3	15	5	7	8	1	12	3	2	13	24	1
4	3	4	9	4	1	13	20	4	9	4	1
5	5	3	1	2	3	14	5	3	11	20	2
6	1	2	3	4	2	15	15	5	7	8	1
7	5	7	3	6	1	16	20	5	7	10	1
8	3	6	5	22	1	17	10	2	7	9	1
9	15	5	7	8	2	18	3	16	5	7	1