Лабораторная работа №4

Исследование временных характеристик динамических звеньев и их соединений

Цель работы: для звеньев, заданных передаточными функциями, выбираемыми из табл. 1, и их соединений:

1) вывести аналитическое выражение кривой разгона;
2) вывести аналитическое выражение импульсной переходной характеристики;
2) построить графические зависимости полученных характеристик при различных значениях постоянных времени и коэффициентов усиления.

Параметры звеньев выбираются из табл. 2 в зависимости от номера варианта.

1.1 Теоретические сведения

Графическое представление переходных и импульсных функций называют временными характеристиками. Переходной функцией h(t) называют функцию, описывающую сигнал на выходе при условии, что на вход подано единичное ступенчатое воздействие, при нулевых начальных условиях. Импульсной или весовой функцией g(t) называют функцию, описывающую реакцию на единичное импульсное воздействие при нулевых начальных условиях.

Любое внешнее воздействие сложной формы может быть приближенно представлено в виде совокупности типовых воздействий, связанных между собой определенными математическими операциями.

Импульсная и переходная функции, как и передаточная функция, являются исчерпывающими характеристиками системы при нулевых начальных условиях. По ним можно определить выходной сигнал при произвольных входных воздействиях.

В работе рассматриваются следующие звенья:

1) идеальное интегрирующее: $W(p) = k/p$;

2) реальное интегрирующее: $W(p) = \dfrac{k}{p(Tp+1)}$;

3) апериодическое 1-го порядка: $W(p) = \dfrac{k}{Tp+1}$;

4) апериодическое 2-го порядка: $W(p) = \dfrac{k}{(T_1p+1)(T_2p+1)}$;

5) реальное дифференцирующее: $W(p) = \dfrac{kp}{Tp+1}$;

6) колебательное ($0 < \zeta < 1$): $W(p) = \dfrac{k}{T^2p^2 + 2\zeta Tp + 1}$;

7) консервативное: $W(p) = \dfrac{k}{T^2p^2 + 1}$;

8) звено запаздывания: $W(p) = ke^{-\tau p}$,

где k – коэффициент пропорциональности (коэффициент усиления); T – постоянная времени интегрирования, с; τ – время запаздывания, с; $0 < \zeta < 1$ – коэффициент затухания колебаний (коэффициент демпфирования).

1.2 Алгоритм выполнения работы

1. Записать передаточную функцию звена с нулевыми начальными условиями.

2. Определить вид переходных процессов с учетом единичного ступенчатого и импульсного воздействий.

3. Построить графики переходных процессов при различных значениях постоянных времени и коэффициента усиления. Рассмотреть следующие случаи: - при табличных значениях параметров (k и T); - изменив значения коэффициентов усиления с исходными значениями постоянных времени; - изменив значения постоянных времени и исходных значениях коэффициентов усиления.

4. Аналогичным образом проанализировать второе звено. В соответствии с п. 1 – 3 представленного алгоритма проанализировать поведение системы, состоящей из соединения двух заданных звеньев.

2.3 Примеры расчета

Для звеньев и соединения звеньев, заданных передаточными функциями: $W(p)=\dfrac{kp}{(Tp+1)}$, $W(p)=\dfrac{k}{(T_1p+1)\cdot(T_2p+1)}$, построить переходные процессы при различных значениях постоянных времени и коэффициента усиления.

Решение

1. Передаточная функция реального дифференцирующего звена: $W(p)=\dfrac{y(p)}{x(p)}=\dfrac{kp}{(Tp+1)}$, откуда $y(p)=\dfrac{kp\cdot x(p)}{(Tp+1)}$, где $x(p)=\int\limits_0^\infty 1(t)\cdot e^{-pt}dt=\dfrac{1}{p}$ – единичное ступенчатое воздействие, или $x(p)=\int\limits_0^\infty \delta(t)\cdot e^{-pt}dt=1$ – единичная импульсная функция, следовательно, $y(p)=\dfrac{kp}{p(Tp+1)}=\dfrac{k}{(Tp+1)}$, $y(p)=\dfrac{kp}{(Tp+1)}$.

2. Выполним обратное преобразование Лапласа (табл. 3) и получим переходной процесс для единичного ступенчатого воздействия: $h(t)=\dfrac{k}{T}e^{-\frac{t}{T}}$. Между импульсной и переходной функциями существует следующая зависимость $\dfrac{dh(t)}{dt}=w(t)$, то $w(t)=-\dfrac{k}{T^2}e^{-\frac{t}{T}}$.

3. Строим временные характеристики звена, рис. 1.

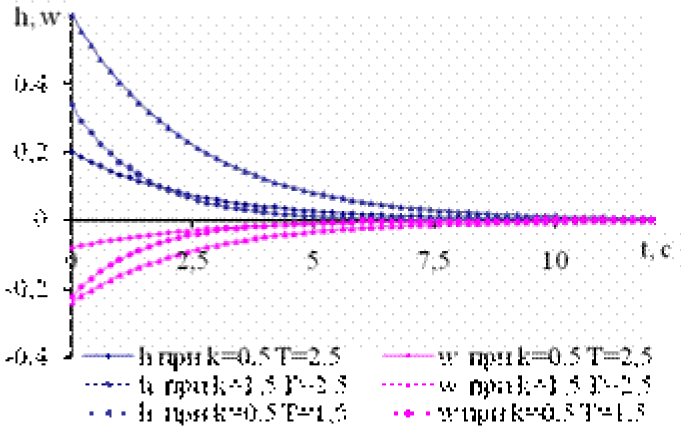

Рисунок 1 Временные характеристики реального дифференцирующего звена

4. Передаточная функция апериодического звена второго порядка: $W(p)=\dfrac{y(p)}{x(p)}=\dfrac{k}{(T_1p+1)(T_2p+1)}$, откуда $y(p)=\dfrac{k\cdot x(p)}{(T_1p+1)(T_2p+1)}$.

Учитывая единичное ступенчатое воздействие или единичную импульсную функцию, получим соответственно:

$$y(p)=\frac{k}{p(T_1p+1)\cdot(T_2p+1)} \text{ и } y(p)=\frac{k}{(T_1p+1)\cdot(T_2p+1)}$$

5. Выполним обратное преобразование Лапласа (см. табл. 3) и получим переходной процесс для единичного ступенчатого воздействия $h(t)=k\cdot\left(1+\dfrac{T_1}{T_2-T_1}e^{-\frac{t}{T_1}}+\dfrac{T_2}{T_1-T_2}e^{-\frac{t}{T_2}}\right)$.

Импульсная функция $w(t) = k \cdot \left(\frac{-1}{T_2 - T_1} e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{-1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_2}} \right)$.

6. Строим временные характеристики звена (рис. 2).

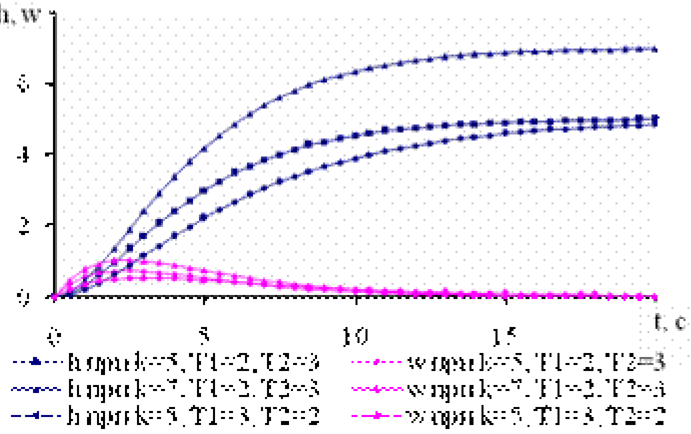

Рисунок 2 Временные характеристики апериодического звена II-го порядка

7. Передаточная функция для последовательного соединения звеньев $W_c(p) = W_1(p) \cdot W_2(p) \cdot \ldots \cdot W_n(p)$. Для последовательно соединенных реального дифференцирующего звена и апериодического звена второго порядка передаточная функция запишется следующим образом:

$$W_c(p) = \frac{y(p)}{x(p)} = \frac{k_1 \cdot k_2 p}{(T_1 p + 1) \cdot (T_2 p + 1) \cdot (T_3 p + 1)},$$ откуда $$y(p) = \frac{k_1 \cdot k_2 \cdot p \cdot x(p)}{(T_1 p + 1) \cdot (T_2 p + 1) \cdot (T_3 p + 1)},$$

где $k1$ – коэффициент усиления; $k2$ – коэффициент усиления апериодического звена второго порядка; $T1$ – постоянная времени реального дифференцирующего звена; $T2$, $T3$ – постоянные времени апериодического звена второго порядка.

Учитывая единичное ступенчатое воздействие или единичную импульсную функцию, получим соответственно:

$$y(p) = \frac{k_1 \cdot k_2}{(T_1 p + 1) \cdot (T_2 p + 1) \cdot (T_3 p + 1)}, \quad y(p) = \frac{k_1 \cdot k_2 \cdot p}{(T_1 p + 1) \cdot (T_2 p + 1) \cdot (T_3 p + 1)}.$$

8. Найдем корни характеристического уравнения методом неопределенных коэффициентов. Получим уравнение вида:

$$y(p) = \frac{k_1 k_2 T_1 T_2 \left[T_2 (T_3 - T_1) - T_3^2 (T_2 - T_1) \right]}{(T_3 - T_2) \cdot (T_3 - T_1) \cdot (T_2 - T_1)} \cdot \frac{1}{T_1 p + 1} - \frac{k_1 k_2 T_1 T_2^2}{(T_3 - T_2) \cdot (T_2 - T_1)} \times$$
$$\times \frac{1}{T_2 p + 1} + \frac{k_1 k_2 T_1 T_2 T_3^2}{(T_3 - T_2) \cdot (T_3 - T_1)} \cdot \frac{1}{T_3 p + 1}.$$

Выполним обратное преобразование Лапласа и получим переходной процесс для единичного ступенчатого воздействия:

$$h(t) = \frac{k_1 k_2 T_2 \left[T_2 (T_3 - T_1) - T_3^2 (T_2 - T_1) \right]}{(T_3 - T_2) \cdot (T_3 - T_1) \cdot (T_2 - T_1)} \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{k_1 k_2 T_1 T_2}{(T_3 - T_2) \cdot (T_2 - T_1)} \cdot e^{-\frac{t}{T_2}} +$$
$$+ \frac{k_1 k_2 T_1 T_2 T_3}{(T_3 - T_2) \cdot (T_3 - T_1)} \cdot e^{-\frac{t}{T_3}}.$$

Импульсная функция:

$$w(t) = -\frac{k_1 k_2 T_2 \left[T_2 (T_3 - T_1) - T_3^2 (T_2 - T_1) \right]}{(T_3 - T_2) \cdot (T_3 - T_1) \cdot (T_2 - T_1) \cdot T_1} \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{k_1 k_2 T_1}{(T_3 - T_2) \cdot (T_2 - T_1)} \cdot e^{-\frac{t}{T_2}} -$$
$$- \frac{k_1 k_2 T_1 T_2}{(T_3 - T_2) \cdot (T_3 - T_1)} \cdot e^{-\frac{t}{T_3}}.$$

9. Строим временные характеристики системы (рис. 3).

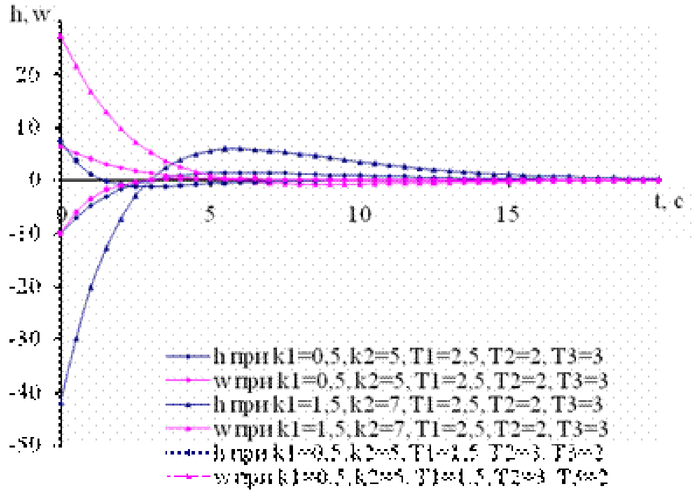

Рисунок 3 Временные характеристики системы

Таблица 1

Выбор набора звеньев в зависимости от варианта

Тип звена	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1. Идеальное интегрирующее				+					+				+					+
2. Реальное интегрирующее	+					+					+						+	
3. Апериодическое 1-гопорядка		+		+				+		+				+		+		
4. Апериодическое 2-гопорядка		+					+		+		+	+			+			
5. Реальное дифференцирующее	+		+				+			+								
6. Колебательное					+	+						+				+	+	
7. Консервативное			+											+				+
8. Запаздывания					+			+					+		+			
Тип соединения звеньев*	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2

Варианты: столбцы 1–18.

* Типы соединения звеньев: 1 – последовательное; 2 – параллельное; 3 – с отрицательной обратной связью; 4 – с положительной обратной связью. При соединении звеньев с обратной связью первое звено находится в прямой, второе в обратной цепи.

Таблица 2

Численные значения параметров звеньев

№ варианта		Тип звена 1	2	3	4	5	6	7	8
1.	10.	*k*=1,2	*k*=0,9 *T*=2 с	*k*=0,8 *T*=1 с	*k*=0,5 T_1=1 с T_2=0,5 с	*k*=1,1 *T*=1,2 с	*k*=1,5 *T*=0,5 с ξ=0,3	*k*=1 *T*=2,5 с	*k*=0,5 τ=1 с
2.	11.	*k*=0,9	*k*=2 *T*=0,9 с	*k*=0,4 *T*=2,5 с	*k*=0,8 T_1=0,8 с T_2=1,2 с	*k*=1,2 *T*=0,5 с	*k*=1,2 *T*=2 с ξ=0,1	*k*=1,5 *T*=1,4 с	*k*=0,6 τ=1,5 с
3.	12.	*k*=2,5	*k*=1,4 *T*=0,5 с	*k*=1,2 *T*=2 с	*k*=2 T_1=1,3 с T_2=1,2 с	*k*=1 *T*=0,8 с	*k*=0,6 *T*=1,2 с ξ=0,5	*k*=1,3 *T*=1,3 с	*k*=1 τ=2 с
4.	13.	k=2	*k*=0,9 *T*=0,8 с	*k*=0,7 *T*=0,9 с	*k*=1,3 T_1=2 с T_2=1,2 с	*k*=0,9 *T*=0,3 с	*k*=0,7 *T*=0,5 с ξ=0,8	*k*=1 *T*=1,2 с	*k*=0,7 τ=3 с
5.	14.	k=2,1	*k*=1,1 *T*=2 с	*k*=1,1 *T*=2 с	*k*=0,9 T_1=1,3 с T_2=1,4 с	*k*=1,3 *T*=1,2 с	*k*=0,5 *T*=0,6 с ξ=0,6	*k*=0,8 *T*=0,5 с	*k*=0,8 τ=0,7 с
6.	15.	*k*=3	*k*=2,1 *T*=1,4 с	*k*=1,3 *T*=1,2 с	*k*=0,85 T_1=0,7 с T_2=0,4 с	*k*=0,9 *T*=1,1 с	*k*=0,8 *T*=1,2 с ξ=0,5	*k*=0,9 *T*=0,9 с	*k*=2 τ=2,5 с
7.	16.	*k*=1	*k*=1,5 *T*=1,5 с	*k*=1,2 *T*=1,3 с	*k*=0,9 T_1=0,9 с T_2=0,5 с	*k*=1,3 *T*=0,3 с	*k*=1 *T*=2 с ξ=0,4	*k*=1,2 *T*=1,5 с	*k*=1,2 τ=1,5 с
8.	17.	*k*=0,6	*k*=0,6 *T*=1,6 с	*k*=0,9 *T*=1,9 с	*k*=1,9 T_1=0,4 с T_2=0,7 с	*k*=1,2 *T*=1,2 с	*k*=0,5 *T*=2,5 с ξ=0,3	*k*=1,4 *T*=0,8 с	*k*=1,3 τ=2 с
9.	18.	*k*=0,7	*k*=0,7 *T*=1,7 с	*k*=0,95 *T*=1,8 с	*k*=1,8 T_1=0,6 с T_2=0,5 с	*k*=0,9 *T*=2 с	*k*=1,2 *T*=1,3 с ξ=0,4	*k*=1,3 *T*=1,3 с	*k*=0,9 τ=1,5 с

Таблица 3

Изображение по Лапласу и оригиналы

Изображение $L\{f(t)\}$	Оригинал $f(t)$	Изображение $L\{f(t)\}$	Оригинал $f(t)$
1	$\delta(t)$	$\dfrac{1}{p(Tp+1)}$	$1-e^{-\frac{t}{T}}$
$\dfrac{1}{p}$	$1(t)$	$\dfrac{1}{T^2p^2+1}$	$\dfrac{1}{T}\sin\dfrac{1}{T}t$
$\dfrac{1}{p^2}$	$t\cdot 1(t)$	$\dfrac{1}{p(T^2p^2+1)}$	$1-\cos\dfrac{1}{T}t$
$\dfrac{1}{Tp+1}$	$\dfrac{1}{T}\cdot e^{-\frac{t}{T}}$	$\dfrac{1}{(T_1p+1)(T_2p+1)}$	$\dfrac{1}{T_1-T_2}\left(e^{-\frac{t}{T_1}}+e^{-\frac{t}{T_2}}\right)$

Изображение $L\{f(t)\}$	Оригинал $f(t)$
$\dfrac{1}{p(T_1p+1)(T_2p+1)}$	$1+\dfrac{T_1}{T_2-T_1}e^{-\frac{t}{T_1}}+\dfrac{T_2}{T_1-T_2}e^{-\frac{t}{T_2}}$
$\dfrac{1}{T^2p^2+2\xi Tp+1}$	$C\cdot e^{-\gamma t}\sin\lambda t$, $\lambda=\dfrac{1}{T}\sqrt{1-\xi^2}$, $C=\dfrac{1}{\lambda T^2}$, $\gamma=\dfrac{\xi}{T}$
$\dfrac{1}{p(T^2p^2+2\xi Tp+1)}$	$1-C\cdot e^{-\gamma t}\sin(\lambda t+\theta)$, $\gamma=\dfrac{\xi}{T}$, $\lambda=\dfrac{1}{T}\sqrt{1-\xi^2}$, $C=\dfrac{1}{\lambda T}$, $\theta=\mathrm{arctg}\,\dfrac{\lambda}{\gamma}$
$\dfrac{1}{p}e^{-\tau p}$	$1(t-\tau)$