Лабораторная работа №5

Исследование устойчивости разомкнутых и замкнутых систем управления

Цель работы: для заданной структурной схемы с передаточными функциями $W_1(p)$, $W_2(p)$ и $W_3(p)$ (табл. 1), сделать заключения об устойчивости разомкнутой и замкнутой систем по коэффициентам и корням характеристического уравнения; построить годограф Михайлова и сделать заключение об устойчивости объекта по критерию Михайлова; построить амплитудно-фазовую характеристику объекта без обратной связи и по критерию Найквиста оценить устойчивость замкнутой системы.

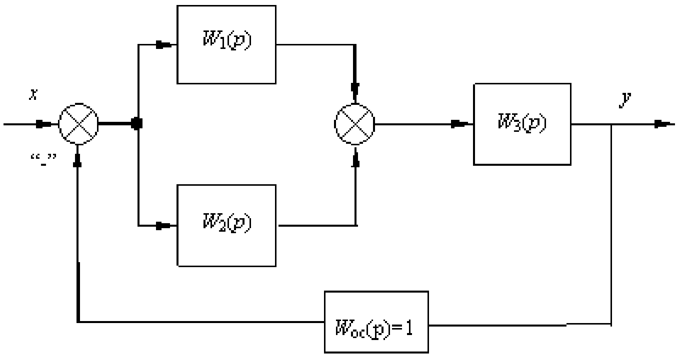

Рисунок 1 Структурная схема исследуемой системы

1.1 Теоретические сведения

Понятие устойчивости является важнейшей качественной оценкой динамических свойств САР. Под устойчивостью понимают способность системы восстанавливать исходное состояние равновесия после снятия внешнего возмущения.

Различают три типа систем:

1) устойчивые системы, выведенные из состояния равновесия каким-либо внешним возмущением, после снятия этого возмущения возвращаются в исходное состояние равновесия;

2) нейтральные системы после снятия возмущения приходят в состояние равновесия, отличное от исходного;

3) неустойчивые системы, в них не устанавливается равновесие после снятия возмущения.

На практике для оценки устойчивости систем применяются алгебраический критерий Рауса-Гурвица; частотный критерий Михайлова; амплитудно-фазо- частотный критерий Найквиста.

Алгебраический критерий устойчивости (Критерий Рауса-Гурвица) является наиболее распространенным алгебраическим критерием и применяется для определения устойчивости системы, когда известно характеристическое уравнение (знаменатель передаточной функции).

Формулировка критерия. Необходимое условие устойчивости линейной системы – все коэффициенты характеристического уравнения положительны; достаточное условие устойчивости – все определители, составленные из коэффициентов характеристического уравнения, положительны. Если хотя бы один из определителей равен 0 – система находится на границе устойчивости. Если какой-либо из определителей меньше 0 – система не устойчива.

Характеристическое уравнение системы имеет вид $A_0 p^n + A_1 p^{n-1} + \ldots + A_{n-1} p + A_n = 0$.

Необходимое условие устойчивости: $A_0 > 0$, $A_1 > 0$, …, $A_{n-1} > 0$, $A_n > 0$. Достаточное условие

$$\Delta_1 = A_1 > 0;\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} A_1 & A_3 \\ A_0 & A_2 \end{vmatrix} > 0;\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} A_1 & A_3 & A_5 \\ A_0 & A_2 & A_4 \\ 0 & A_1 & A_3 \end{vmatrix} > 0;\ \ldots;\ \Delta_n > 0.$$

устойчивости:

Правило составления определителей. В главную диагональ определителя n-го порядка записываются все коэффициенты, начиная с первого. Столбцы матрицы вверх от главной диагонали заполняются коэффициентами с порядковыми номерами по возрастанию индексов, вниз – по убыванию индексов. Все элементы определителя, индексы которых больше порядка характеристического уравнения и меньше 0, заполняют нулями.

Частотный критерий Михайлова так же, как и алгебраический критерий, применяется в тех случаях, когда задано характеристическое уравнение системы.

Обозначим полином, стоящий в левой части характеристического уравнения, через $D(p)$, т.е.

$D(p) = A_0 p^n + A_1 p^{n-1} + \ldots + A_{n-1} p + A_n$.

Заменим p на $i\omega$. Получим вектор характеристического полинома: $D(i\omega)=A_0 i\omega^n + A_1 i\omega^{n-1} + \ldots + A_{n-1} i\omega + A_n = \mathrm{Re}(D(i\omega)) + i\,\mathrm{Im}(D(i\omega))$.

При изменении ω от 0 до ∞ вектор $D(i\omega)$ опишет кривую, называемую годограф Михайлова.

Формулировка критерия. Система устойчива, если годограф Михайлова при изменении частоты от 0 до ∞ начинается на положительной части действительной оси комплексной плоскости, проходит последовательно против часовой стрелки n квадрантов плоскости, нигде не обращается в 0 и не проходит через начало координат (n – порядок характеристического уравнения системы). Если годограф проходит через начало координат комплексной плоскости, то система находится на границе устойчивости, если нарушается, хотя бы одно из условий критерия – система неустойчива.

Амплитудно-фазовый критерий Найквиста служит для определения устойчивости замкнутой системы, охваченной отрицательной статической обратной связью (Wос = – 1), по АФЧХ разомкнутой системы.

Формулировка критерия. Замкнутая система устойчива, если разомкнутая система устойчива, и ее амплитудно-фазовая частотная характеристика не охватывает на комплексной плоскости точку с координатами (–1; i0). Если АФЧХ проходит через эту точку, то система находится на границе устойчивости, если охватывает – система неустойчивая.

1.2 Примеры расчета

Провести анализ устойчивости разомкнутой и замкнутой систем, содержащих в прямой цепи, подключенные параллельно два звена, с передаточными функциями $W(p) = k_п$ и $W(p) = \frac{k_и}{p}$, где $k_п$= 1; $k_и$= 0,5 и последовательно соединенное с ними звено с передаточной функцией $W(p) = \frac{k}{T^2p^2 + 2\xi Tp + 1}$, где T = 25, ζ= 0,5, k = 8.

Решение

1. Передаточная функция разомкнутой системы: $W(p) = \left(k_п + \frac{k_и}{p}\right) \cdot \frac{k}{T^2p^2 + 2\xi Tp + 1} = \frac{(k_п p + k_и)k}{p(T^2p^2 + 2\xi Tp + 1)}$.

2. *Алгебраический критерий Рауса-Гурвица*

Так как все коэффициенты характеристического уравнения положительны, то необходимое условие устойчивости объекта выполнено. Для проверки достаточного условия составим определители характеристического уравнения $25^2p^3 + 2 \cdot 0{,}5 \cdot 25p^2 + 1p = 0$.

$$\Delta_1 = 2 \cdot 0{,}5 \cdot 25 = 25 > 0,\quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 25 & 0 \\ 625 & 1 \end{vmatrix} = 25 - 0 = 25 > 0,\quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 625 & 1 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \end{vmatrix} = 25(1 \cdot 0 - 25 \cdot 0) - 0 + 0 = 0.$$

Так как один определитель, составленный из коэффициентов характеристического уравнения нулевой, а два положительны, разомкнутая система находится на границе устойчивости.

3. *Частотный критерий Михайлова*

В характеристическом полиноме $D(p)=p\cdot(25^2p^2+2\cdot0{,}5\cdot25p+1)$, заменяем p на $i\omega$, избавляемся от старших степеней i и группируем слагаемые, содержащие и не содержащие i:

$$D(j\omega) = (625(j\omega)^2 + 25(j\omega) + 1)\cdot(j\omega) = -625j\omega^3 - 25\omega^2 + 1j\omega = -25\omega^2 + j\cdot(\omega - 625\omega^3).$$

Выделяем действительную и мнимую части: $Re = -25\omega^2$; $Im = \omega - 625\omega^3$.

Задаваясь значениями частоты из интервала [0; ∞[, строим годограф Михайлова (рис. 2).

Годограф Михайлова при изменении ω =[0; +∞) начинается в начале координат комплексной плоскости, проходит против часовой стрелки по квадрантам плоскости и уходит в бесконечность в третьей четверти. Следовательно, разомкнутая система находится на границе устойчивости.

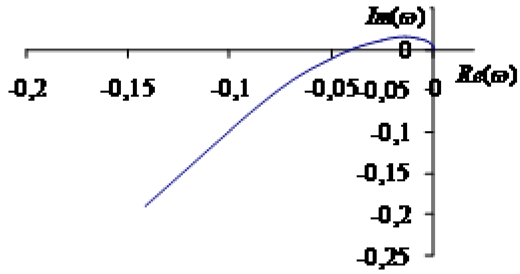

Рисунок 2 Годограф Михайлова для $D(p)=p\left(25^2p^2+2\cdot 0{,}5\cdot 25p+1\right)$

4. Передаточная функция замкнутой системы с отрицательной единичной обратной связью равна: $W(p)=\dfrac{\left(k_{п}p+k_{и}\right)k}{p\left(T^2p^2+2\xi Tp+1\right)+\left(k_{п}p+k_{и}\right)k}$.

5. *Алгебраический критерий Рауса-Гурвица*

Все коэффициенты характеристического уравнения положительны – необходимое условие устойчивости объекта выполнено. Для проверки достаточного условия составим определители характеристического уравнения $625p^3+2\cdot 0{,}5\cdot 25p^2+9p+4=0$.

$$\Delta_1=2\cdot 0{,}5\cdot 25=25>0,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}25 & 4\\ 625 & 9\end{vmatrix}=25\cdot 9-4\cdot 625=-2275<0,$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}25 & 4 & 0\\ 625 & 9 & 0\\ 0 & 25 & 4\end{vmatrix}=25(1\cdot 4-25\cdot 0)-4\left(625\cdot 4-0\right)+0=$$

$$=100-10000=-9900<0.$$

Так как один определитель (Δ_1), составленный из коэффициентов характеристического уравнения, положителен, а два отрицательны, замкнутая система неустойчива.

6. *Частотный критерий Михайлова*

В характеристическом полиноме $D(p)=625p^3+2\cdot 0{,}5\cdot 25p^2+9p+4$,

заменяем p на $i\omega$, избавляемся от старших степеней i и группируем слагаемые, содержащие и не содержащие i: $D(j\omega)=625(j\omega)^3+25(j\omega)^2+9(j\omega)+4=-625j\omega^3-25\omega^2+9j\omega+4=(-25\omega^2+4)+j(\omega\cdot(9-625\omega^2))$.

Выделяем действительную и мнимую части: $Re=-25\omega^2+4$; $Im=\omega\cdot(9-625\omega^2)$.

Задаваясь значениями частоты из интервала [0; ∞[, строим годограф Михайлова (рис. 3):

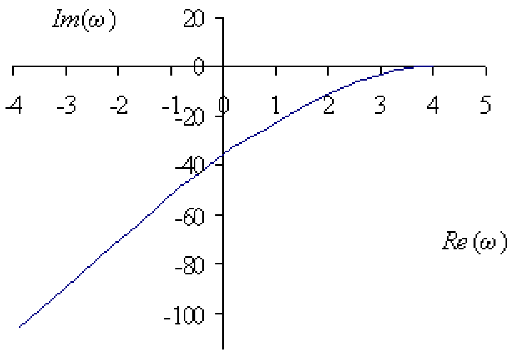

Рисунок 3 Годограф Михайлова для $D(p)=625p^3+2\cdot 0{,}5\cdot 25p^2+9p+4$

Годограф Михайлова при изменении частоты от 0 до ω начинается на положительной части действительной оси комплексной плоскости, не проходит последовательно против часовой стрелки 3 квадранта плоскости, обращается в 0 и уходит в бесконечность в третьей четверти. Следовательно, замкнутая система неустойчива.

7. *Критерий Найквиста*

По амплитудно-фазовому критерию Найквиста устойчивости замкнутой системы, охваченной отрицательной статической обратной связью, определяется по АФЧХ разомкнутой системы. Для разомкнутой системы $W(p)=\dfrac{\left(k_{п}p+k_{и}\right)k}{p\left(T^2p^2+2\xi Tp+1\right)}$. Заменяем p на $i\omega$, освобождаемся от иррациональности в знаменателе и группируем слагаемые, содержащие и не содержащие i, получаем

$$Re(\omega)=\frac{k\left(k_{\text{п}}\left(1-T^2\omega^2\right)-2\xi Tk_{\text{и}}\right)}{\left(1-T^2\omega^2\right)^2+4\xi^2T^2\omega^2};\qquad Im(\omega)=\frac{-k\left(k_{\text{и}}\left(1-T^2\omega^2\right)+2k_{\text{п}}\xi T\omega^2\right)}{\omega\left(\left(1-T^2\omega^2\right)^2+4\xi^2T^2\omega^2\right)}.$$

Задаваясь значениями частоты из интервала [0; ∞), строим АФЧХ разомкнутой системы, (рис. 4):

Так как разомкнутая система находится на границе устойчивости и ее годограф не охватывает точку (–1; *i*0), то замкнутая система является неустойчивой.

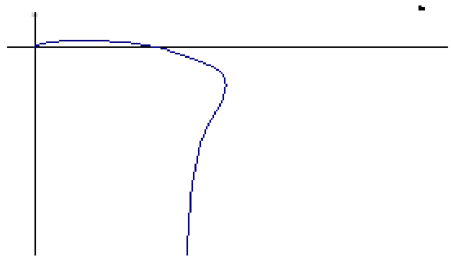

Рисунок 4 *Годограф разомкнутой системы для анализа устойчивости по критерию Найквиста*

Таблица 1

Передаточные функции звеньев и численные значения их коэффициентов

№ варианта	$W_1(p)$	$W_2(p)$	Численные значения коэффициентов звеньев $W_3(p)=\frac{k}{(T_1p+1)(T_2p+1)}$	
1	$W(p)=k_{\text{п}}$	$W(p)=\frac{k_{\text{и}}}{p}$	$k_{\text{п}}$= 10; $k_{\text{и}}$= 0,5	k = 3; T_1=1,5 с; T_2 = 1,2 с
2	$W(p)=k_{\text{п}}$	$W(p)=k_{\text{д}}p$	$k_{\text{п}}$= 15; $k_{\text{д}}$= 2	k = 2; T_1=1,1 с; T_2 = 1,7 с
3	$W(p)=\frac{k_{\text{и}}}{p}$	$W(p)=k_{\text{д}}p$	$k_{\text{и}}$= 0,8; $k_{\text{д}}$= 3	k = 0,5; T_1=1,3 с; T_2 = 1,5 с
4	$W(p)=k_{\text{п}}$	$W(p)=\frac{k_{\text{и}}}{p}$	$k_{\text{п}}$= 5; $k_{\text{и}}$= 0,6	k = 1,5; T_1=0,9 с; T_2 = 1,5 с
5	$W(p)=k_{\text{п}}$	$W(p)=k_{\text{д}}p$	$k_{\text{п}}$= 10; $k_{\text{д}}$= 2,5	k = 2; T_1=0,8 с; T_2 = 2,2 с
6	$W(p)=\frac{k_{\text{и}}}{p}$	$W(p)=k_{\text{д}}p$	$k_{\text{и}}$= 0,5; $k_{\text{д}}$= 2	k = 0,5; T_1=1,8 с; T_2 = 0,5 с
7	$W(p)=k_{\text{п}}$	$W(p)=\frac{k_{\text{и}}}{p}$	$k_{\text{п}}$= 15; $k_{\text{и}}$= 0,8	k = 4; T_1=2,3 с; T_2 = 1,5 с
8	$W(p)=k_{\text{п}}$	$W(p)=k_{\text{д}}p$	$k_{\text{п}}$= 5; $k_{\text{д}}$= 4	k = 2,5; T_1=1,5 с; T_2 = 1,5 с
9	$W(p)=\frac{k_{\text{и}}}{p}$	$W(p)=k_{\text{д}}p$	*$k_{и}$= 1,2; $k_{д}$= 2*	*k = 0,5; T1=1,2 с; T2 = 0,7 с*
10	$W(p)=k_{\text{п}}$	$W(p)=\frac{k_{\text{и}}}{p}$	$k_{\text{п}}$= 3; $k_{\text{и}}$= 1,5	k = 1,2; T_1=1,5 с; T_2 = 0,8 с
11	$W(p)=k_{\text{п}}$	$W(p)=k_{\text{д}}p$	$k_{\text{п}}$= 7; $k_{\text{д}}$= 1,5	k = 2; T_1=2,2 с; T_2 = 1,5 с
12	$W(p)=\frac{k_{\text{и}}}{p}$	$W(p)=k_{\text{д}}p$	$k_{\text{и}}$= 0,5; $k_{\text{д}}$= 3,5	k = 0,3; T_1=0,5 с; T_2 = 1,2 с
13	$W(p)=k_{\text{п}}$	$W(p)=\frac{k_{\text{и}}}{p}$	$k_{\text{п}}$= 12; $k_{\text{и}}$= 0,3	k = 3,5; T_1=1,8 с; T_2 = 1,7 с
14	$W(p)=k_{\text{п}}$	$W(p)=k_{\text{д}}p$	$k_{\text{п}}$= 15; $k_{\text{д}}$= 5	k = 3; T_1=1,5 с; T_2 = 1,3 с
15	$W(p)=\frac{k_{\text{и}}}{p}$	$W(p)=k_{\text{д}}p$	$k_{\text{и}}$= 1,6; $k_{\text{д}}$= 5	k = 0,5; T_1=0,7 с; T_2 = 1,1 с
16	$W(p)=k_{\text{п}}$	$W(p)=\frac{k_{\text{и}}}{p}$	$k_{\text{п}}$= 8; $k_{\text{и}}$= 1,2	k = 2,5; T_1=1,3 с; T_2 = 1,5 с
17	$W(p)=k_{\text{п}}$	$W(p)=k_{\text{д}}p$	$k_{\text{п}}$= 12; $k_{\text{д}}$= 3,5	k = 1,5; T_1=1,1 с; T_2 = 1,7 с
18	$W(p)=\frac{k_{\text{и}}}{p}$	$W(p)=k_{\text{д}}p$	$k_{\text{и}}$= 1,8; $k_{\text{д}}$= 4	k = 0,7; T_1=1,1 с; T_2 = 0,7 с