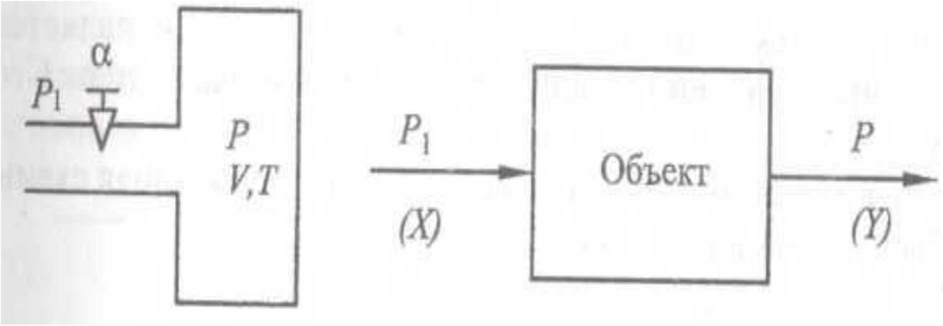
Основы теории управления

д.т.н. Мокрова Наталия Владиславовна

пятница	ауд. 125, 119
14:35 - 16:05	Лекция
16:20 - 17:50	Лабораторная работа

Примеры ДУ объектов управления

Пневматическая емкость



Основной элемент здесь камера с объемом *V* и дроссель на входе в камеру с коэффициентом проводимости а. В камеру поступает воздух с давлением Р.

При постоянной проводимости дросселя давление внутри камеры зависит от входного давления, которое изменяется во времени.

Найти уравнение, описывающее зависимость давления внутри камеры P от входного давления P_1 в любой момент времени.

Уравнение материального баланса камеры по воздуху: скорость изменения массы воздуха *M в* объёме *V* будет равна притоку воздуха через дроссель под действием перепада давления $P_1 - P.$

$$\frac{dM}{dt} = \alpha\sqrt{P_1 - P}$$

Уравнение состояния газов $PV = MRT,$

из которого можно получить уравнение, описывающее изменение массы воздуха во времени.

Предположим, что температура в камере постоянна, после дифференцирования получим:

$$\frac{dM}{dt} = \frac{RT}{V}\frac{dP}{dt}.$$

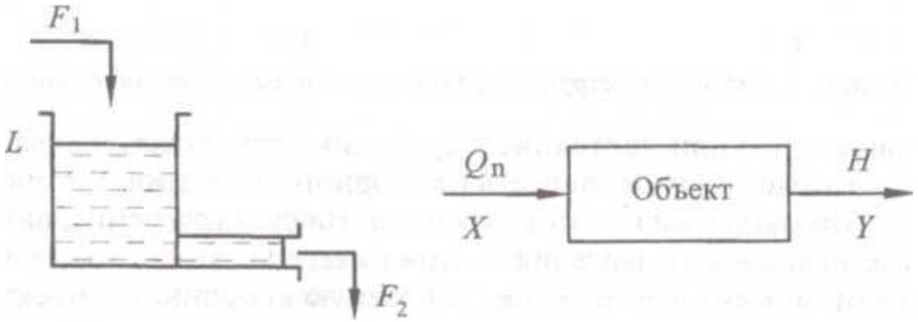
В выбранных координатах:

$$\frac{dP}{dt} = \frac{RT}{V}\sqrt{P_1 - P}.$$

Таким образом, полученное уравнение динамики является обыкновенным нелинейным дифференциальным уравнением 1-го порядка.

Примеры ДУ объектов управления
Гидравлическая емкость

Гидравлическая емкость представляет собой резервуар, в котором имеется приток F_1 и сток F_2 жидкости.
Основной параметр, характеризующий состояние объекта, – уровень жидкости L на выходе.



Принципиальная и структурная схемы гидравлической емкости

При постоянной степени открытия дросселя на стоке уровень жидкости определяется разностью между притоком и стоком $F_1 – F_2$.
Уравнение динамики, описывающее зависимость уровня в переходном режиме от F_1 получают из уравнения материального баланса и уравнения истечения жидкости через гидравлическое сопротивление:

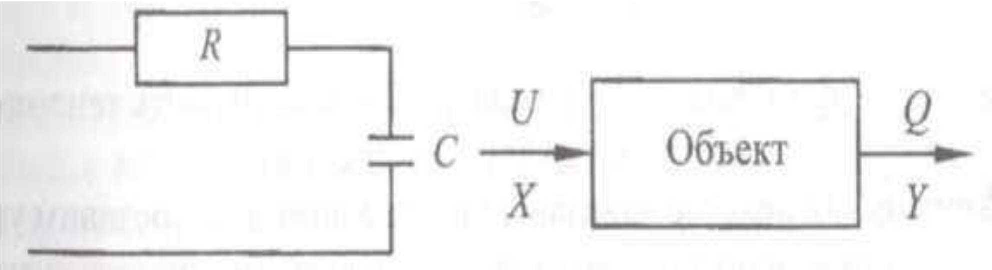
$$\frac{dL}{dt} = \frac{F_1 - F_2}{S}; \qquad F_2 = \alpha\sqrt{L},$$

где S – площадь поперечного сечения аппарата; a – расходный коэффициент дросселя.
Исключив из уравнений F_2 получим обыкновенное нелинейное дифференциальное уравнение 1-го порядка:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{F_1}{S} - \frac{\alpha\sqrt{L}}{S}.$$

Примеры ДУ объектов управления
Электрическая и тепловая емкости

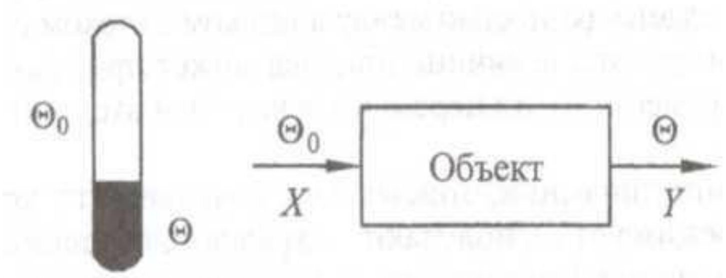
Электрической емкостью называется цепь, состоящая из сопротивления R и емкости C (RC – цепь).



Выходной координатой этого объекта может быть выбран заряд Q на обкладках конденсатора, а входной – напряжение на входе цепи U. Дифференциальное уравнение получается на основе закона Кирхгофа:

$$\frac{\partial Q}{\partial R} = \frac{U}{R} - \frac{Q}{RC}$$

Тепловая емкость – ртутный термометр



Θ_0 – вх. коор. температура наружной среды;
Θ – вых. температура ртути.
Предположим – время прогрева стенки термометра мало и им можно пренебречь.
Тогда зависимость Θ – Θ_0 получается из уравнения теплового баланса:

$$\frac{\partial \Theta_0}{\partial t} = \frac{k_t S}{MC_p}(\Theta_0 - \Theta),$$

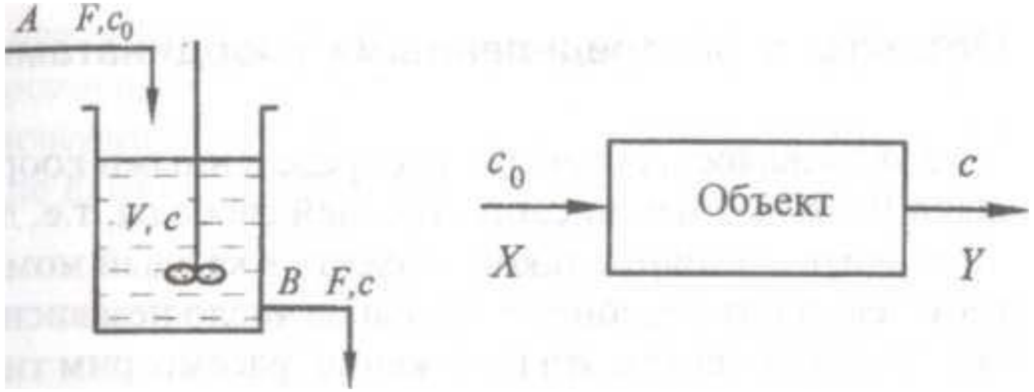
где k_1 – коэффициент теплопередачи;
S – поверхность теплопередачи;
M, C_p – масса и удельная теплоемкость ртути.

Примеры ДУ объектов управления
Химический реактор идеального смешения

Химический реактор идеального перемешивания непрерывного действия, в котором протекает химическая реакция первого порядка типа $A \rightarrow B$.

$$\frac{dc}{dt} = \frac{F}{V}(c_0 - c) - kc$$

где F – объемный расход реакционной смеси через реактор; V – объем реактора; c_∂, c – концентрация компонента A в исходной смеси и в реакторе; κ – константа скорости реакции.

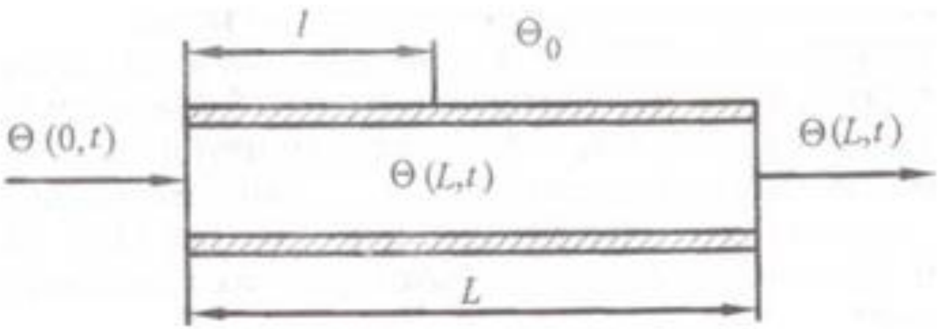


Принципиальная и структурная схемы химического реактора

Допущения:

- вследствие идеального перемешивания реакционной смеси концентрация во всех точках реактора изменяется одинаково (объект с сосредоточенными параметрами);
- теплоемкость реакционной смеси постоянна и равна теплоемкости исходного реагента;
- реакция протекает в изотермических условиях, т.е. температура в реакторе постоянна.

Объекты с распределенными координатами



Принципиальная и структурная схемы трубчатого теплообменника

Жидкость, проходя внутри трубы, изменяет свою температуру от начального значения (0) до конечного (L), чтобы определить состояние объекта, необходимо задать температуру жидкости в каждый момент времени в каждом сечении l, получаем дифференциальные уравнения динамики в частных производных.

Если пренебречь инерционностью объекта, то его уравнение можно записать в виде теплового баланса для элементарного объёма жидкости в сечении *l*:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + \nu \frac{\partial \Theta}{\partial l} = k_T(\Theta_0 - \Theta(l,t))$$

Уравнение статики теплообменника, получим приравняв к нулю производную температуры по времени, получим ОДУ:

$$\nu \frac{\partial \Theta}{\partial l} = k_T(\Theta_0 - \Theta(l))$$

Исследование объектов с распределенными параметрами как объектов управления представляет собой сложную задачу.

Динамические характеристики объектов регулирования
Передаточная функция

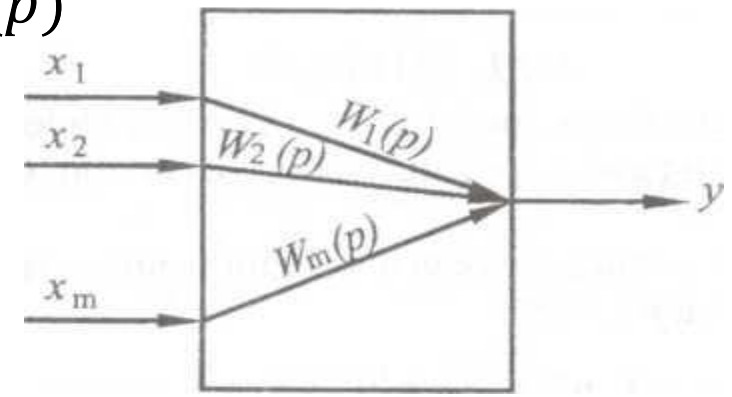
Передаточная функция – одна из основных динамических характеристик объекта регулирования.

Передаточной функцией объекта $W(p)$ называется отношение преобразованного по Лапласу выхода объекта $y(p)$ к преобразованному по Лапласу входу $x(p)$.

Передаточная функция является функцией комплексного переменного.

$$W(p) = \frac{y(p)}{x(p)}$$

Передаточная функция характеризует динамику объекта по определенному каналу, связывающему конкретный вход объекта с выходом. Если в объекте имеется несколько входов, то каждому каналу связи будет соответствовать своя передаточная функция.



Структурная схема многоканального объекта

Передаточная функция

При подаче на вход объекта сигнала $x(t) = 1(t)$ реакция на выходе описывается уравнением $y(t) = kt$.

Для определения передаточной функции объекта найдем изображение по Лапласу для входного и выходного сигналов:

$$x(p) = \frac{1}{p}; \quad y(p) = \frac{k}{p^2} \quad \Rightarrow W(p) = \frac{y(p)}{x(p)} = \frac{k}{p}$$

Так же, как и ДУ, передаточная функция полностью характеризует динамику объекта.

Для получения передаточной функции по ДУ необходимо преобразовать его по Лапласу при нулевых начальных условиях, и из полученного алгебраического уравнения найти отношение y**(**p**)**/x **(**p**)**.

ДУ линейного объекта:

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) =$$
$$= b_m x^{(m)}(t) + b_{m-1} x^{m-1}(t) + \ldots + b_1 x'(t) + b_0 x(t),$$

После преобразования по Лапласу при нулевых начальных условиях:

$$W(p) = \frac{y(p)}{x(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \ldots b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0}.$$

Структурные схемы

Передаточные функции используют для структурного анализа сложных объектов.

Представление различных регуляторов в виде блок-схем показало единство принципа их построения.

Структурная схема является графическим изображением ДУ объекта и обладает наглядностью.

Составление структурной схемы – этап исследования объекта с большим числом взаимосвязанных параметров, который облегчает составление его общего математического описания.

При составлении структурной схемы объект условно разбивается на отдельные элементы, называемые звеньями, которые описываются достаточно простыми зависимостями.

Точка на линии связи, в которой происходит разветвление лиши (т.е. один и тот же сигнал подается на входы нескольких звеньев), называется узлом.

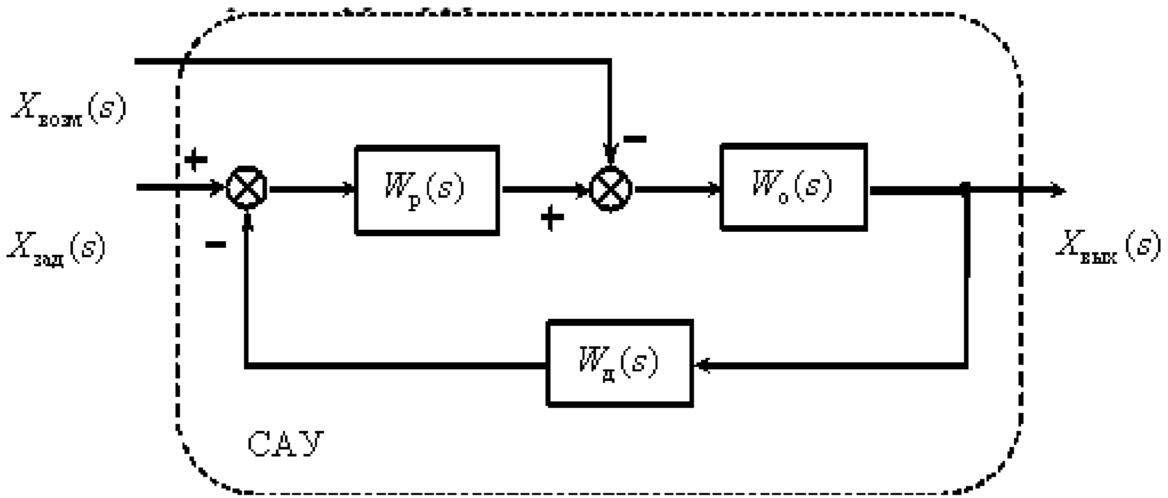
Алгебраическое сложение нескольких сигналов изображается в виде круга на линии связи, называемого сумматором. В упрощенных структурных схемах сумматоры иногда не показываются, а суммируемые сигналы подаются на вход соответствующего звена.

Задача эквивалентных преобразований

САУ представляет систему, состоящую из функциональных элементов, каждый из которых может быть представлен в виде динамического звена.

САУ – совокупность динамических звеньев с известными математическими моделями.

Структура типичной САУ



где

$W_{\text{о}}(s)$, $W_{\text{д}}(s)$, $W_{\text{р}}(s)$ – передаточные функции соответственно объекта, датчика и регулятора,

$X_{\text{зад}}(s)$, $X_{\text{возм}}(s)$, $X_{\text{вых}}(s)$ – изображения задающего, возмущающего и выходного сигналов.

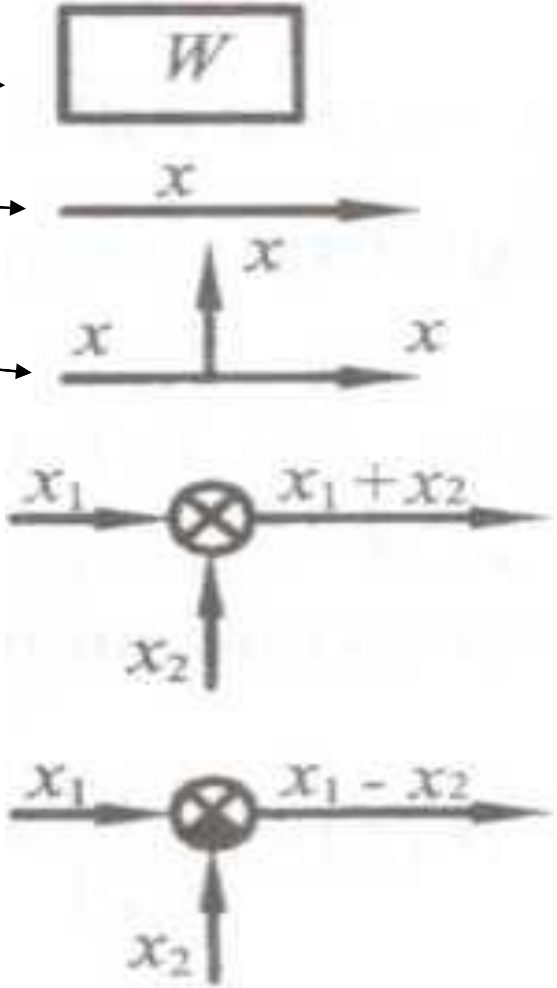
В процессе анализа и синтеза САУ необходимо получать передаточные функции САУ, которые связывают выходную переменную с заданием и возмущением в САУ, по известным структурной схеме и передаточным функциям динамических звеньев, входящих в состав САУ.

Когда известны частотные характеристики динамических звеньев, а необходимо определить частотные характеристики САУ, характеризующие связи между выходом и входом САУ.

Элементы структурных схем

Условное изображение основных элементов структурных схем

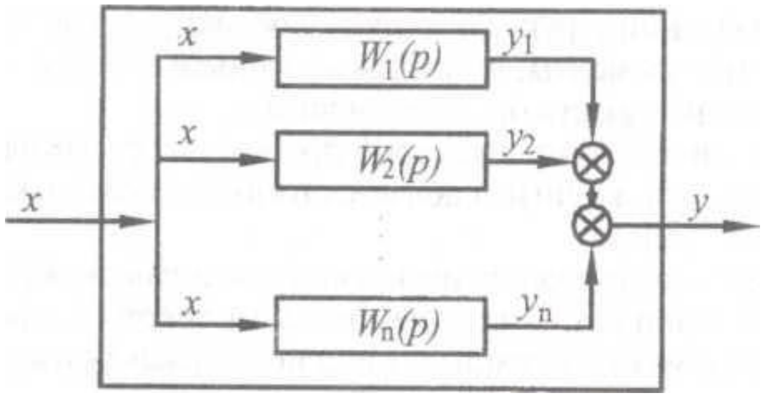
- звено;
- линия связи;
- узел;
- сумматор.



Любая сложная структурная схема может быть изображена с помощью трех основных типов соединений:

- параллельное соединение;
- последовательное соединение;
- соединение с обратной связью.

Параллельное соединение звеньев



Структурная схема системы с параллельным соединением звеньев

- уравнения выходных координат каждого звена;
- выход всей системы;
- передаточная функция системы.

$$y_j(p) = x(p)W_j(p), \quad j = \overline{1,n}.$$

$$y(p) = \sum_{j=1}^{n} y_j(p) = x(p) \sum_{j=1}^{n} W_j(p),$$

$$W(p) = \frac{y(p)}{x(p)} = \sum_{j=1}^{n} W_j(p).$$

Передаточная функция системы параллельно соединенных звеньев равна сумме передаточных функций отдельных звеньев.

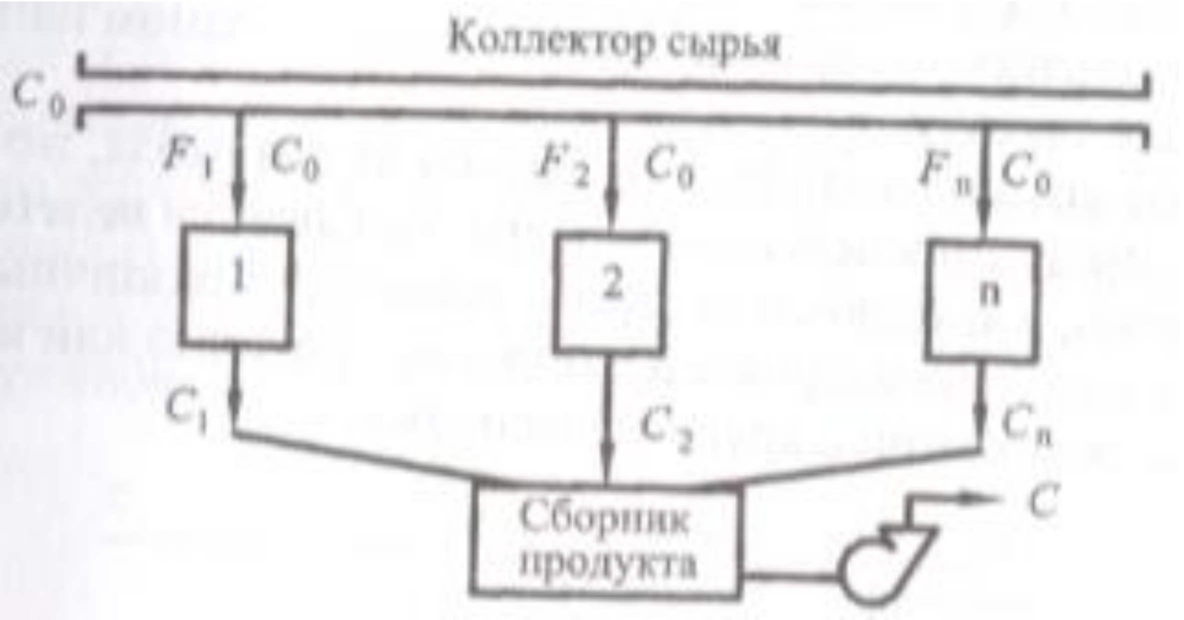
Пример

Сырье для реакторов поступает из общего коллектора и имеет одинаковую концентрацию C_0.

В результате реакции в каждом аппарате образуется продукт определенного состава, который зависит от условий реакции в данно аппарате.

Продукты реакции из всех аппаратов собирают в общий сборник, в котором происходит смешение.

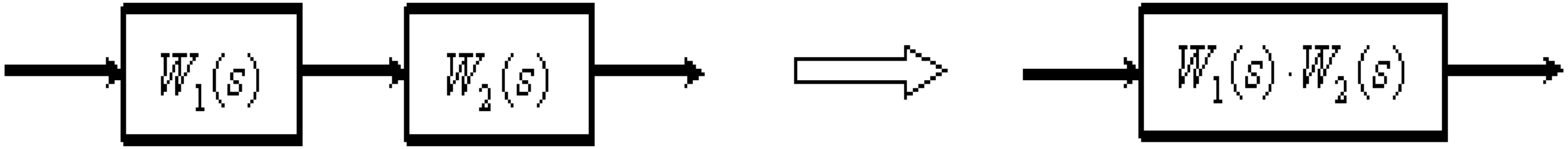
Состав продукта в сборнике равен сумме взвешенных (т.е. взятых с различными коэффициентами) концентраций продуктов отдельных реакторов.



Цепочка параллельно работающих однотипных реакторов.

Последовательное соединение звеньев

Выход предыдущего звена подается на вход последующего.



Уравнения для отдельных звеньев:

$$y_1(p) = x(p)W_1(p),$$

$$y_j(p) = y_{j-1}(p)W_j(p) \quad j = \overline{2,n}.$$

С учетом того, что выход *n*-го звена является выходом всей системы, передаточная функция системы:

$$W(p) = \frac{y_n(p)}{x(p)} = \prod_{j=1}^{n} W_j(p).$$

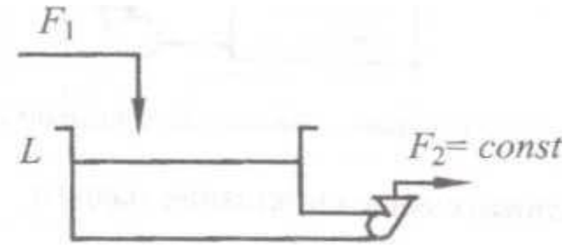
Передаточная функция системы последовательно соединенных звеньев равна произведению передаточных функций отдельных звеньев для детектирующих звеньев.

Детектирующие и не детектирующие звенья

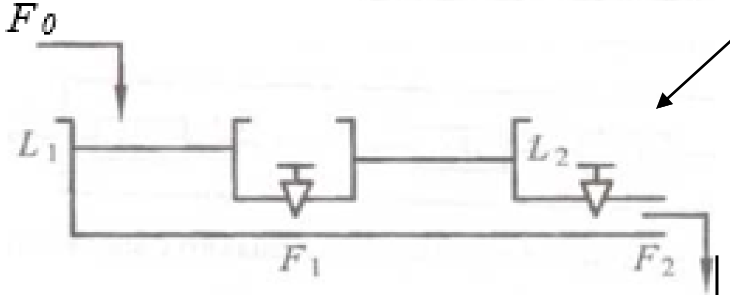
Детектирующие звенья – выход каждого звена зависит только от его входа и не зависит от последующего звена, пропускают сигнал по цепочке только в одном направлении: от входа к выходу.

Недетектирующее звено – выход зависит не только от его входа, но и от выходной координаты последующего звена. Уравнения такого звена различны в зависимости оттого, рассматривается ли оно изолированно или в последовательном соединении с другими звеньями.

Примеры детектирующих и недетектирующих звеньев – гидравлические резервуары



- сток из резервуара определяется производительностью насоса и является величиной постоянной;



- сток жидкости из резервуара зависит от перепада давления на сопротивлении. При подключении на стоке второго резервуара этот перепад будет зависеть от уровня не только в первом резервуаре, но и во втором.

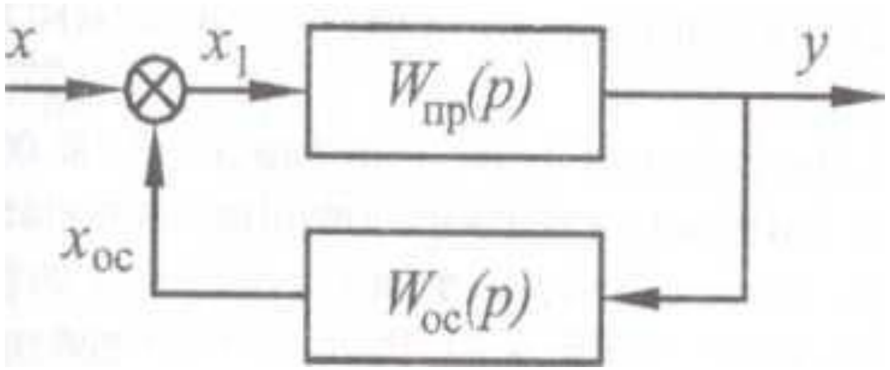
Соединение с обратной связью

Обратной связью называют передачу сигнала с выхода звена на его вход, где сигнал обратной связи x_{oc} суммируется с внешним сигналом x.

Если суммарный сигнал x_1 определяется соотношением $x_1 = x + x_{oc}$, то обратная связь называется *положительной*; если $x_1 = x - x_{oc}$, т.е. сигнал обратной связи вычитается из внешнего сигнала, то обратная связь называется *отрицательной.*

В линии обратной связи в общем случае может быть включено звено, в котором выходной сигнал y преобразуется в соответствии с передаточной функцией $W_{oc}(p)$ в сигнал x_{oc}. Это звено может отсутствовать, т.е. $W_{oc}(p) = 1$ и $x_{oc} = y$.

Структурная схема системы с обратной связью



Передаточная функция замкнутой системы

$W_{зс}(p)$ – передаточная функция замкнутой системы;

$W_{пр}(p)$ и $W_{ос}(p)$ – передаточные функции звеньев.

Для каждого звена и сумматора:

$$y(p) = x_1(p)W_{пр}(p);\qquad x_1 = x + x_{ос}.$$

$$x_{ос}(p) = y(p)W_{ос}(p);$$

Исключив $x_1(p)$ и $x_{ос}(p)$, получим общее уравнение системы:

$$y(p) = x(p)W_{пр}(p) + y(p)W_{пр}(p)W_{ос}(p) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(p)[1 - W_{пр}(p)W_{ос}(p)] = x(p)W_{пр}(p),$$

Получим формулу для передаточной функции замкнутой системы:

$$W_{зс}(p) = \frac{y(p)}{x(p)} = \frac{W_{пр}(p)}{1 - W_{пр}(p)W_{ос}(p)}.$$

Для отрицательной обратной связи:

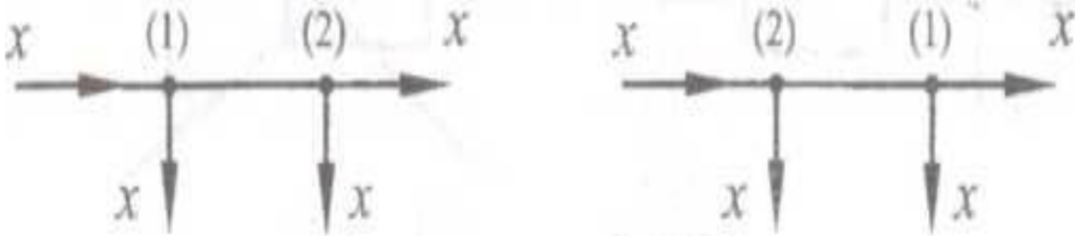
$$W_{зс}(p) = \frac{y(p)}{y(p)} = \frac{W_{пр}(p)}{1 + W_{пр}(p)W_{ос}(p)}.$$

Правила преобразования структурных схем

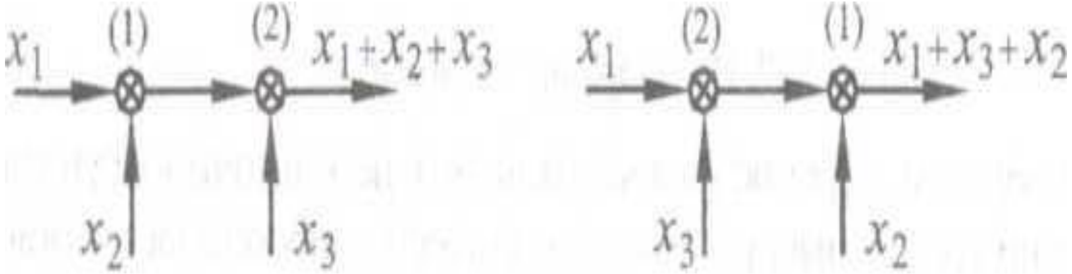
Реальные объекты обладают более сложными структурами. Упрощение вывода передаточных функций сложных объектов достигается за счет преобразования их структурных схем к трем основным типам соединений.

Преобразование структурных схем производится по отдельным участкам. Критерий правильности преобразования заключается в том, чтобы входные и выходные сигналы преобразуемого участка до и после преобразования были одинаковы.

1. Перенос узла через узел осуществляется без дополнительных преобразований:

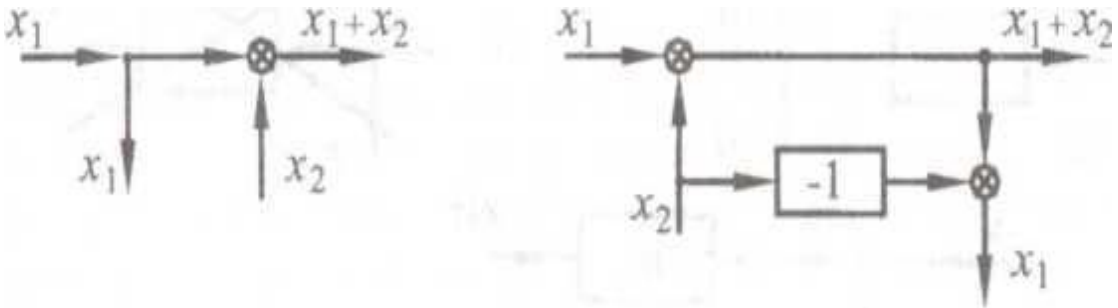


2. Перенос сумматора через сумматор также производится без дополнительных преобразований:

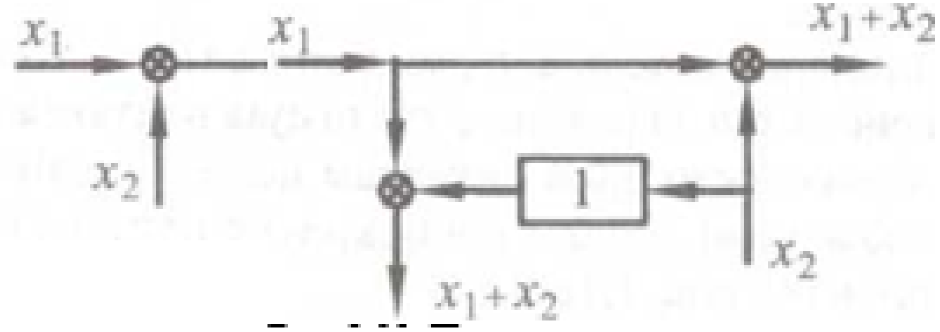


Правила преобразования структурных схем

3. При переносе узла через сумматор (по направлению сигнала) в боковой ветви преобразованного участка появляется дополнительное звено с передаточной функцией – 1.

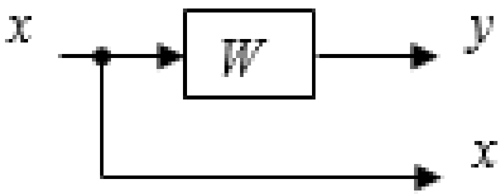


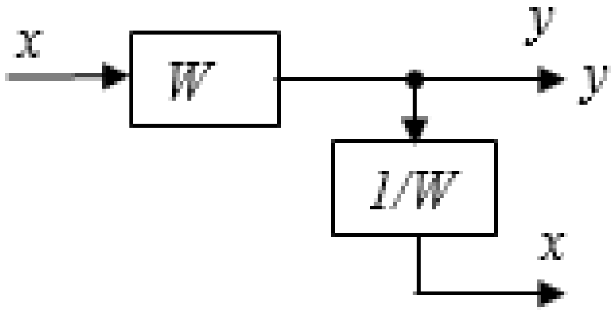
4. При переносе сумматора через узел (по направлению сигнала) в боковой ветви также появляется дополнительное звено с передаточной функцией +1.



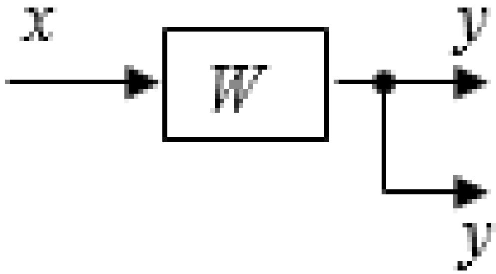
Правила преобразования структурных схем

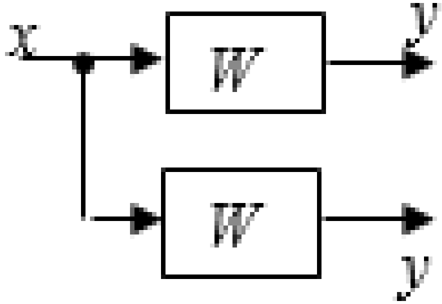
5. Перенос узла через звено (по направлению сигнала) приводит к появлению дополнительного звена с передаточной функцией 1/ *W*.





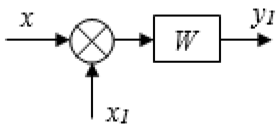
6. При переносе звена через узел (по направлению сигнала) появляется дополнительное звено с передаточной функцией *W*.

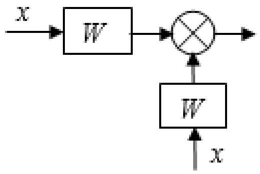


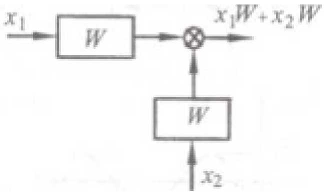


Правила преобразования структурных схем

7. Перенос сумматора через звено (по направлению сигнала) сопровождается появлением дополнительного звена с передаточной функцией *W*.

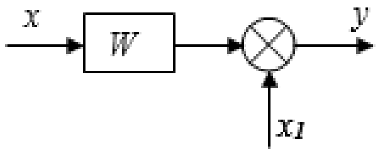


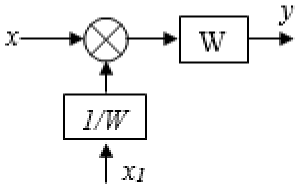




$$y=x*W+x_1*W=W(x+x_1)$$

8. Перенос звена через сумматор (по направлению сигнала) приводит к появлению дополнительного звена с передаточной функцией 1/ *W*.



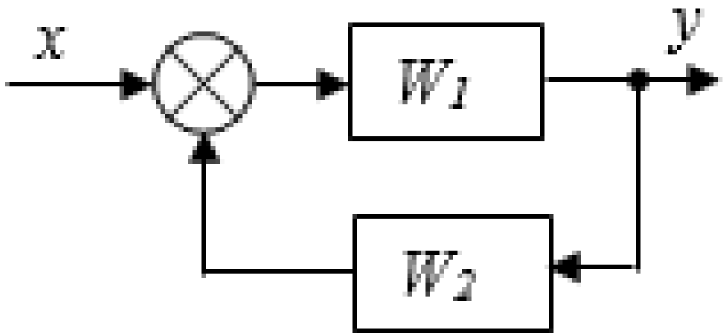


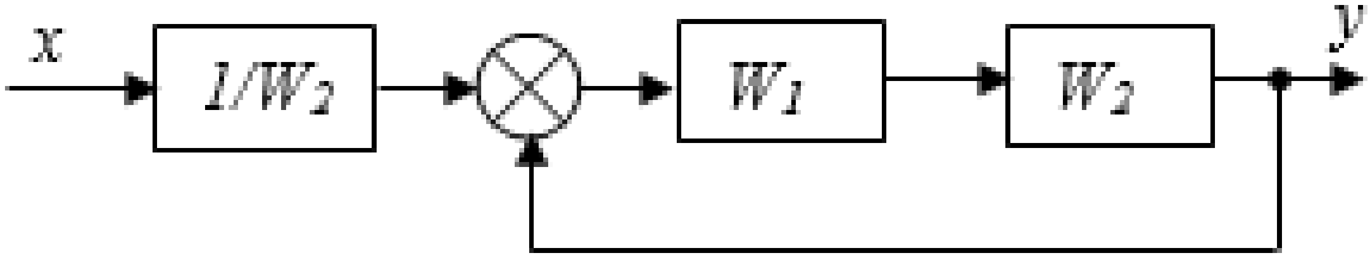
$y = x \cdot W + x_1$

$y= (x+x_1 \cdot 1/W) \cdot W = xW + x_1$

Правила преобразования структурных схем

8. Приведение ОС к единичной:

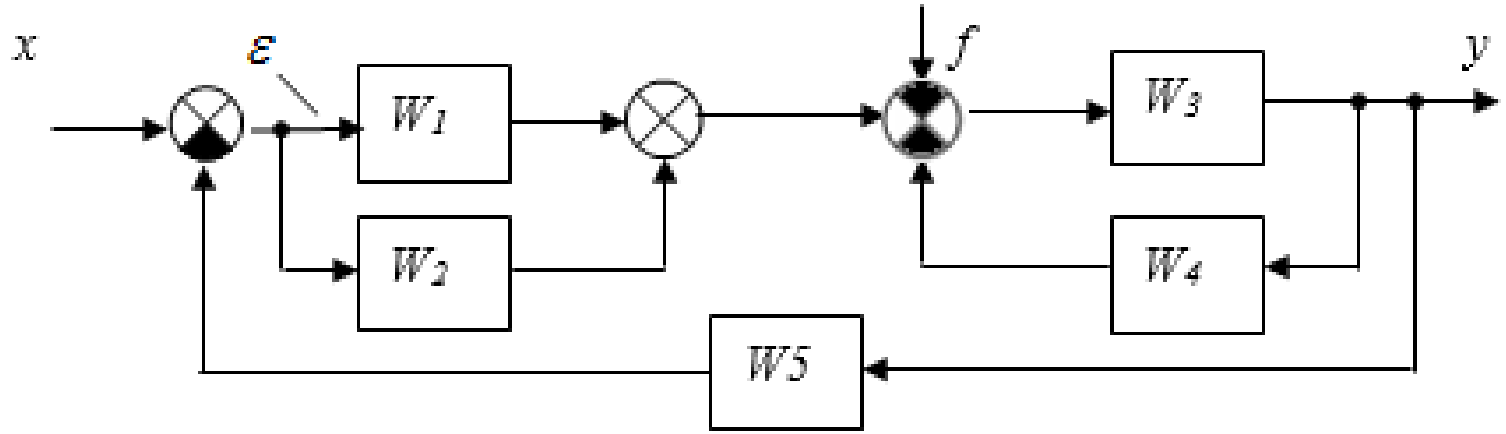




$$W_{экв} = \frac{W_1}{1 - W_1 W_2} * \frac{W_2}{W_2} = \frac{1}{W_2} * \frac{W_1 W_2}{1 - W_1 W_2}$$

Преобразования структурных схем

Пример 1:



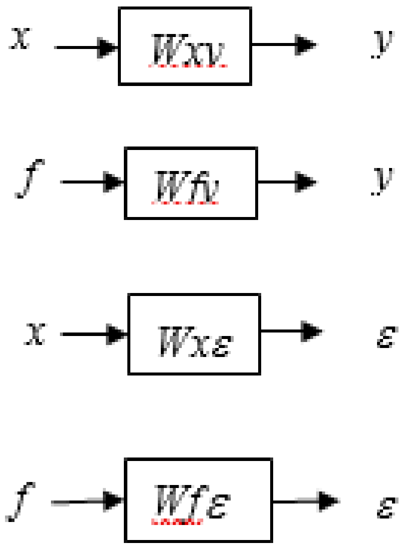
Требуется определить следующие передаточные функции линейной системы:

1) Wxy - ?

2) Wfy - ?

3) Wxε - ?

4) Wfε - ?



Пример 1

Заданная система линейна, значит, для неё справедлив принцип суперпозиции, что позволяет при выполнении преобразований не учитывать входные и выходные сигналы, не задействованные при определении конкретных передаточных функций.

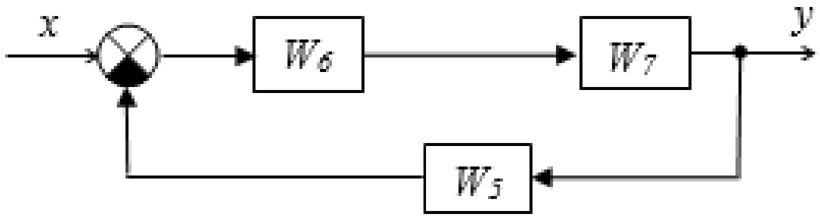
При определении передаточной функции *Wxy* отбрасывается возмущающее воздействие ***f*** и не учитывается ε.

Вводим новые обозначения:

$$W_6 = W_1 + W_2 ,$$

$$W_7 = \frac{W_3}{1 + W_3 * W_4}$$

Получаем схему:



$$W_8 = W_6 + W_7 ,$$

$$Wxy = \frac{W_8}{1 + W_8 W_5}$$

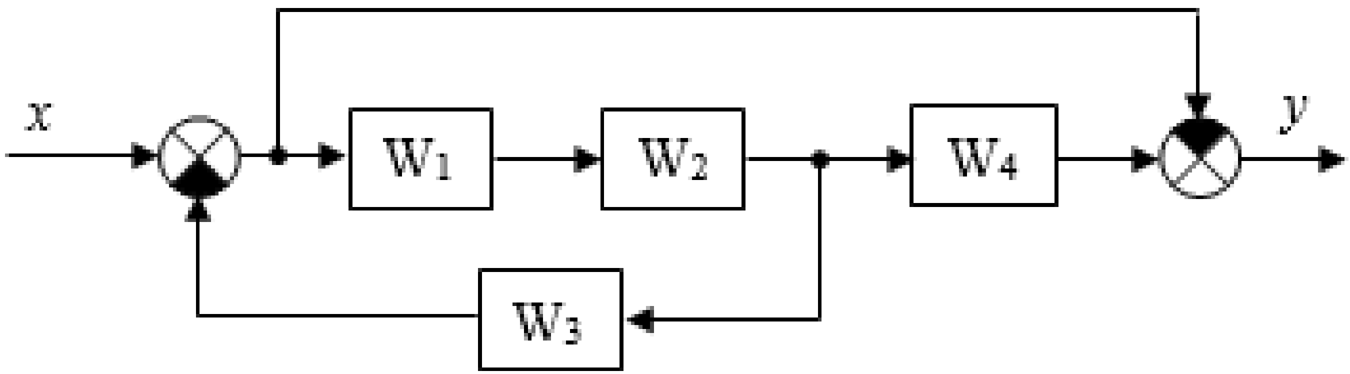
Передаточная функция, определяющая зависимость (связь) выходной величины *Y* от входной *X:*

$$Wxy = \frac{(W_1 + W_2)W_3}{1 + W_3 W_4 + W_3 W_5 (W_1 + W_2)}$$

Аналогично определяются другие передаточные функции системы.

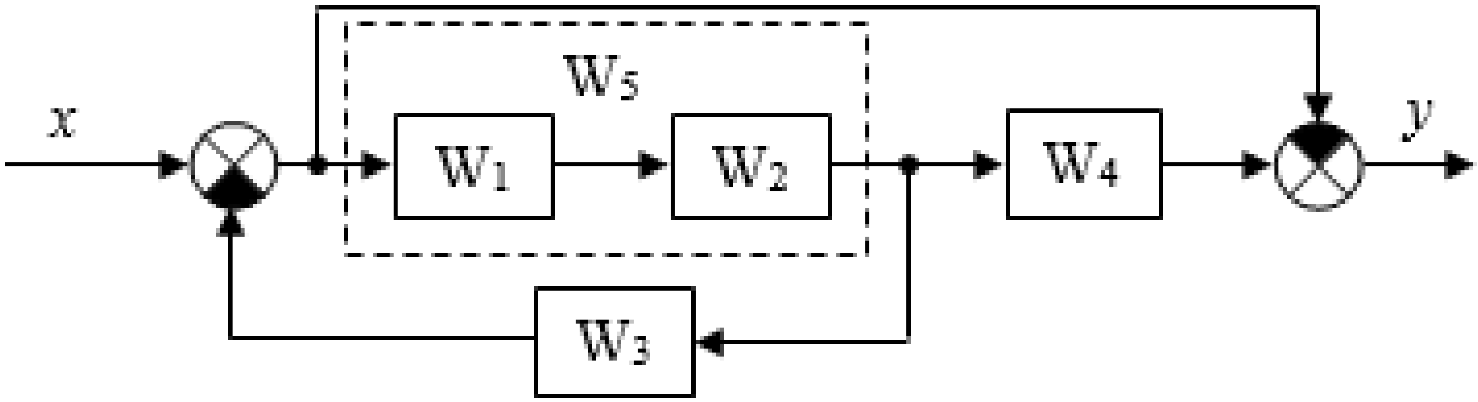
Пример 2

Задана структурная схема:



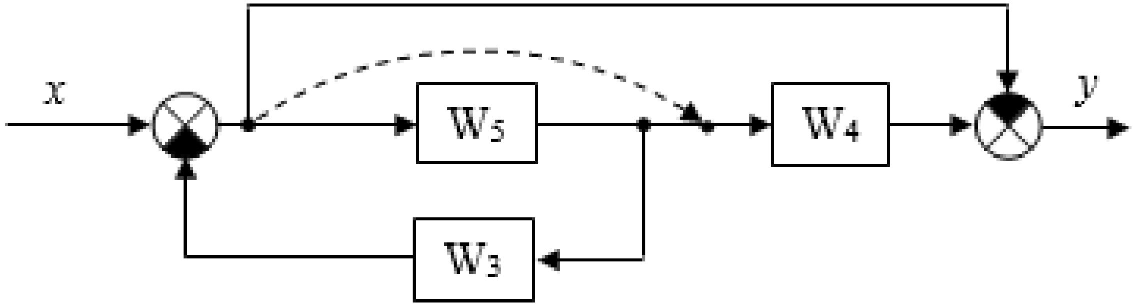
Требуется получить эквивалентную передаточную функцию $\boldsymbol{W_{xy}}$.

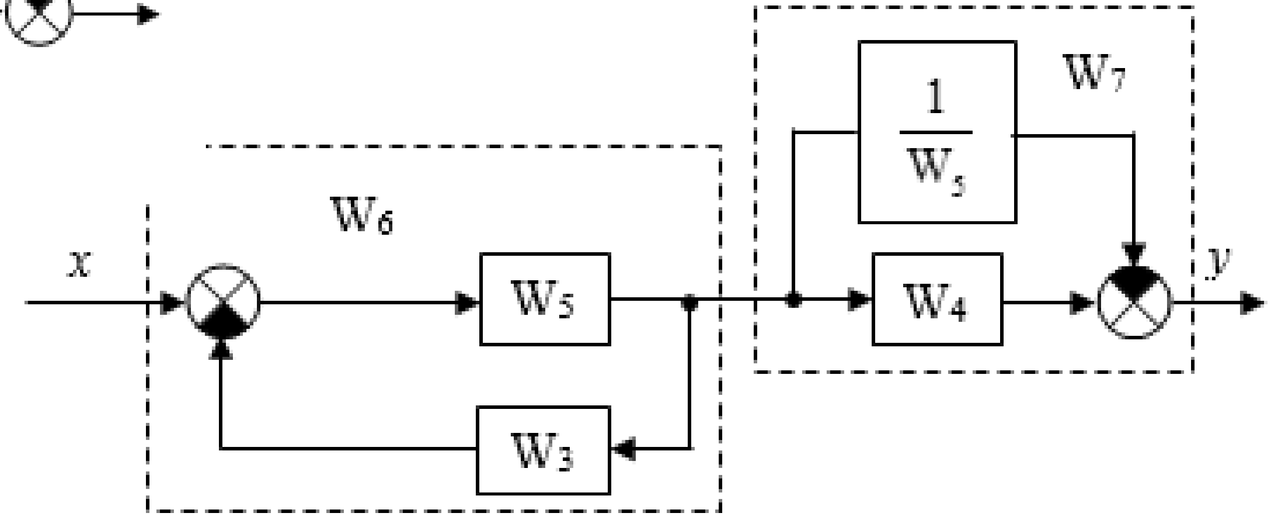
1. Объединяем в одно два последовательно соединенных звена: $\boldsymbol{W_5 = W_1 * W_2}$.



Пример 2

2. Для дальнейшего упрощения структурной схемы необходимо из контура с обратной связью ($\boldsymbol{W_5}$, $\boldsymbol{W_3}$, сумматор) удалить точку съема (разветвления) сигнала, иначе к данному контуру нельзя применить правило охвата звена обратной связью. Для того чтобы, после переноса точки съема сигнал на входе второго сумматора остался неизменным, в цепь этого сигнала добавляем звено с передаточной функцией обратной $\boldsymbol{W_5}$.





Пример 2

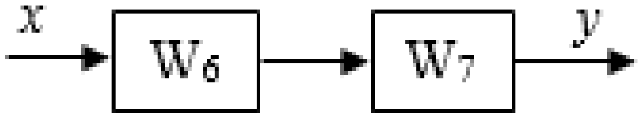
3. По правилам преобразования звена, охваченного отрицательной обратной связью получаем:

$$W_6 = \frac{W_5}{1 + W_3 W_5}$$

и для параллельного соединения:

$$W_7 = W_4 - \frac{1}{W_5}$$

4. В итоге имеем:



$$W_{xy} = W_6 * W_7$$

После подстановки в полученное выражение обозначений передаточных функций звеньев исходной схемы и упрощения выражения получим:

$$W_{xy} = \frac{W_1 * W_2 * W_4 - 1}{1 + W_1 * W_2 * W_3}$$

Математические модели систем составляются из математических моделей её составных частей (звеньев).

Структурная схема системы представлена в виде совокупности (соединения) всех её элементов, представленных передаточными функциями.