

Основы теории управления

д.т.н. Мокрова Наталия Владиславовна

пятница	ауд. 119
14:35 - 16:05	Лекция
16:20 - 17:50	Лабораторная работа

Динамические характеристики объектов регулирования

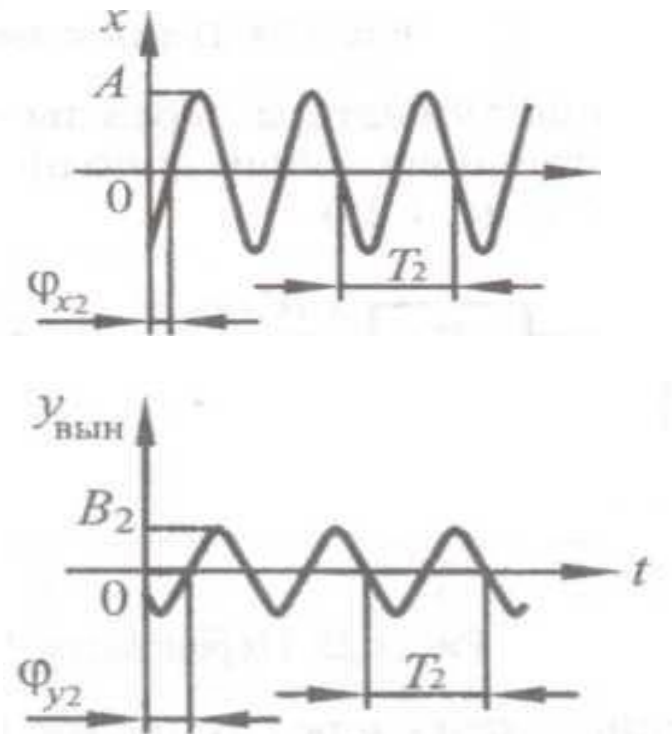
1. Временные характеристики. Кривая разгона. Импульсно переходная функция.
2. Решение дифференциальных уравнений. Преобразование Лапласа.
3. Передаточная функция.
4. **Частотные характеристики.**
5. **Связь между динамическими характеристиками.**

Частотные характеристики

Если на вход линейного объекта подавать гармонический сигнал, вида $x(t) = A\sin(\omega t)$, то на выходе его в установившемся режиме получим также гармонический сигнал, частота которого равна частоте входных колебаний, а амплитуда и фаза будут отличаться от амплитуды и фазы входного сигнала, $y_{\text{вых}}(t) = B\sin(\omega t + \varphi_y)$



Экспериментальное
определение частотных
характеристик объекта



О комплексных числах

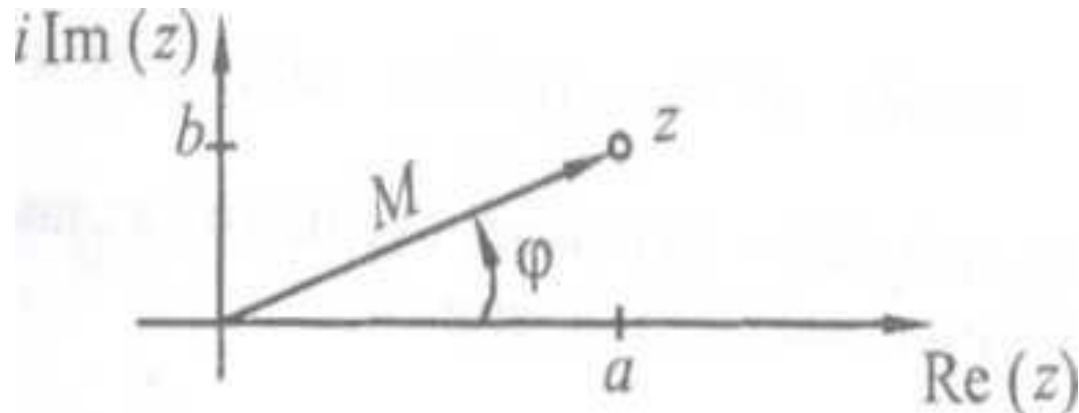
Комплексным числом называется число, определяемое соотношением

$$z = a + ib = Me^{j\varphi},$$

где a , b , M , φ – действительные числа, называемые действительной частью (Re), мнимой частью (Im), модулем (mod) и аргументом (arg) числа z .

Геометрически комплексное число может быть представлено в прямоугольных координатах (Re, Im) или в полярных координатах (M , φ).

a , b , M , φ имеют определённый геометрический смысл и связаны между собой однозначными соотношениями:



a – абсцисса точки z ,

b – ордината точки z ,

M – длина вектора, соединяющего начало координат с точкой z ;

φ – угол между положительной ветвью действительной оси и вектором (за положительное принимается направление отсчета против часовой стрелки).

Частотные характеристики динамического звена

Частотной характеристикой динамического звена называют функцию комплексного аргумента $j\omega$, полученную путем формальной замены s на $j\omega$ в выражении передаточной функции

$$W(j\omega) = [W(s)]_{s=j\omega}.$$

Преобразование Фурье от импульсной характеристики равно частотной характеристике динамического звена:

$$W(j\omega) = F\{w(t)\}$$

Частотная функция характеристика как функция комплексного аргумента может быть представлена в виде:

$$W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega) = |W(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)},$$

где:

$P(\omega)$ — действительная (вещественная) часть $W(j\omega)$,

$jQ(\omega)$ — мнимая часть $W(j\omega)$,

$|W(j\omega)|$ — модуль (амплитуда) $W(j\omega)$,

$\varphi(\omega)$ — фаза аргумент $W(j\omega)$.

Частотные характеристики в ТАУ

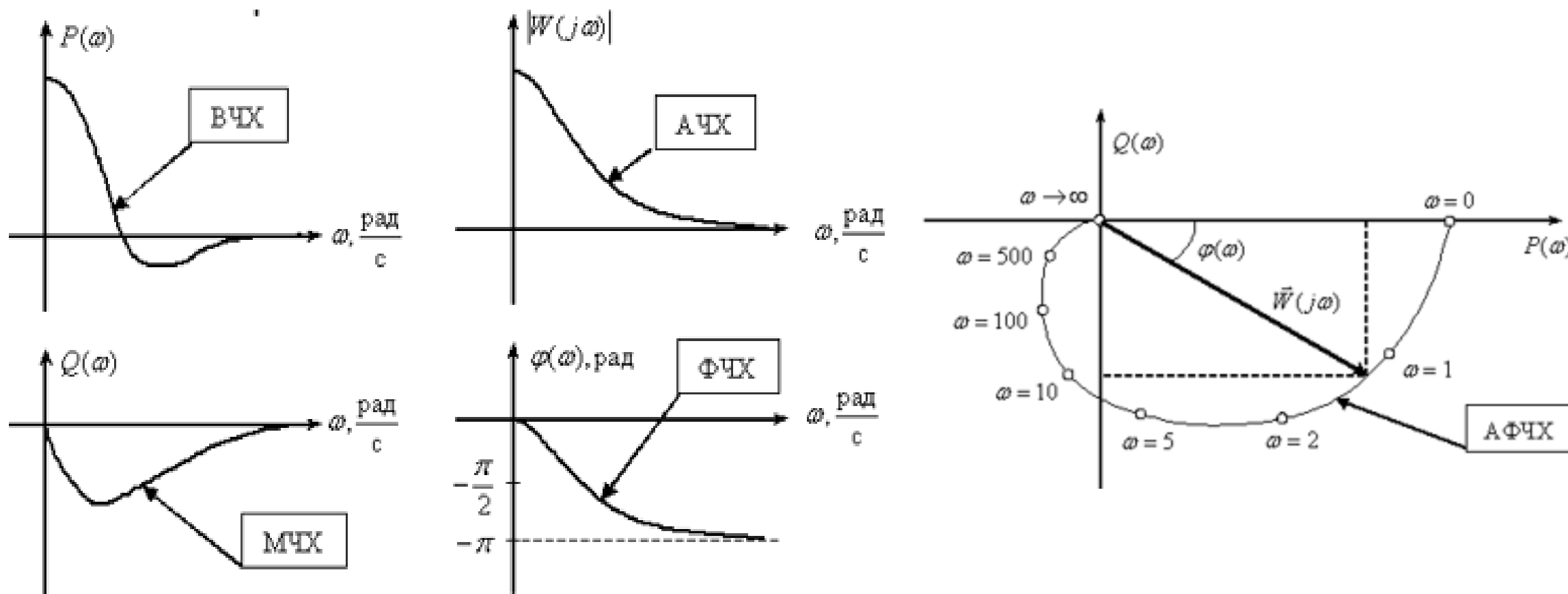
Частотные характеристики динамических звеньев:

- Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) –
$$f_1(\omega) = |W(j\omega)| = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}$$
- Фазочастотная характеристика (ФЧХ) –
$$f_2(t) = \varphi(\omega) = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}$$
- Вещественная частотная характеристика (ВЧХ) –
$$f_3(t) = P(\omega) = |W(j\omega)| \cos \varphi(\omega)$$
- Мнимая частотная характеристика (МЧХ) –
$$f_4(t) = Q(\omega) = |W(j\omega)| \sin \varphi(\omega)$$
- Амплитудно-фазовая частотная характеристика (АФЧХ), которая определяется как годограф (след движения конца) вектора $W(j\omega)$, построенный на комплексной плоскости при изменении частоты от 0 до ∞ .

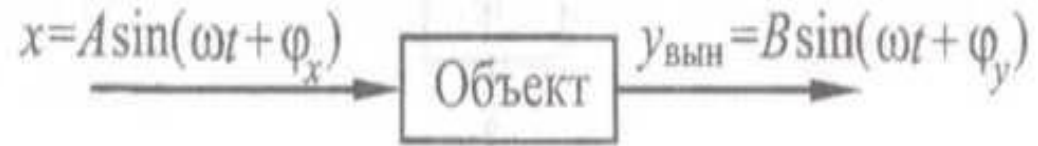
Амплитуда, фаза, действительная и мнимая части частотной характеристики являются функциями частоты, поэтому частотная характеристика используется и графически представляется в виде амплитудно-фазовой, действительной, мнимой, амплитудной и фазовой частотных характеристик.

Графическое представление ЧХ

Частотные характеристики некоторого динамического звена



Параметры ЧХ



Степень различия между параметрами входных и выходных гармонических сигналов не зависит от амплитуды и фазы входного сигнала, а определяется только динамическими свойствами самого объекта и частотой колебаний.

$$M(\omega) = \frac{B}{A}; \quad \varphi(\omega) = \varphi_y - \varphi_x; \quad W(j\omega) = M(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

$$M(\omega) - \text{АЧХ}; \quad \varphi(\omega) - \text{ФЧХ}; \quad W(j\omega) - \text{АФХ}).$$

АЧХ определяется отношением амплитуды выходных колебаний к амплитуде входного сигнала;

ФЧХ есть разность фаз выходных и входных колебаний;

АФХ – комплексная функция, для которой АЧХ является модулем, а ФЧХ – аргументом.

Передаточная функция

Амплитудно-частотная характеристика $W(j\omega)$ может быть получена из ДУ, если рассмотреть реакцию объекта на гармонический сигнал вида $e^{i\omega t}$.

Представим функцию $x(t) = 2 A \cos(\omega t)$ по формуле Эйлера:

$$x(t) = 2 A \cos \omega t = A e^{i\omega t} + A e^{-i\omega t} = x_1(t) + x_2(t);$$

Для объекта, описываемого линейным дифференциальным уравнением n -го порядка

$$\begin{aligned} a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = \\ = b_m x^{(m)}(t) + b_{m-1} x^{(m-1)}(t) + \dots + b_1 x'(t) + b_0 x(t). \end{aligned}$$

Согласно принципу суперпозиции уравнение вынужденного движения $y(t)$ можно выразить в виде суммы:

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = A W(i\omega) e^{i\omega t} + A W(-i\omega) e^{-i\omega t},$$

Для определения $W(j\omega)$ дифференцируем $y_1(t)$ n раз и $x_1(t)$ m раз, получим:

$$W(i\omega) = \frac{b_m (i\omega)^m + b_{m-1} (i\omega)^{m-1} + \dots + b_1 i\omega + b_0}{a_n (i\omega)^n + a_{n-1} (i\omega)^{n-1} + \dots + a_1 i\omega + a_0}.$$

Амплитудно-фазовая характеристика может быть получена из передаточной функции заменой p на $i\omega$.

Представление функции $W(i\omega)$

В прямоугольных координатах:

$$W(i\omega) = \operatorname{Re}(\omega) + i \operatorname{Im}(\omega),$$

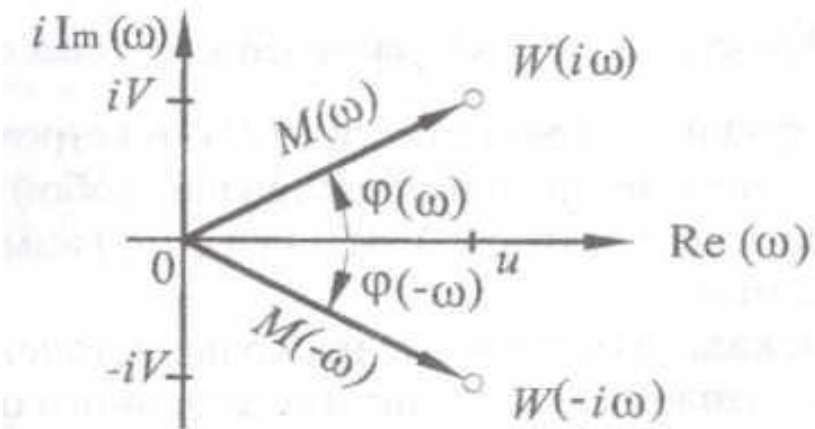
В полярных координатах:

$$W(-i\omega) = M(\omega)e^{-i\varphi(\omega)}.$$

$M(\omega)$, $\varphi(\omega)$, $\operatorname{Re}(\omega)$ и $\operatorname{Im}(\omega)$ связаны между собой соотношениями:

$$M(\omega) = \sqrt{\operatorname{Re}^2(\omega) + \operatorname{Im}^2(\omega)}; \quad \varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im}(\omega)}{\operatorname{Re}(\omega)};$$

$$\operatorname{Re}(\omega) = M(\omega) \cos \varphi(\omega); \quad \operatorname{Im}(\omega) = M(\omega) \sin \varphi(\omega)$$



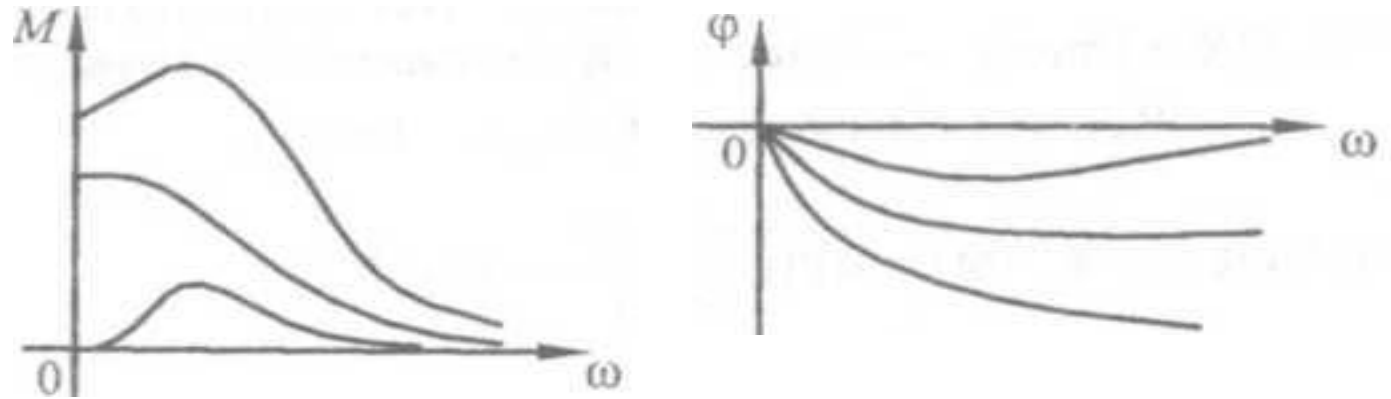
Связь между $W(i\omega)$ и $W(-i\omega)$

$$\operatorname{Re}(-\omega) = \operatorname{Re}(\omega); \quad \operatorname{Im}(-\omega) = -\operatorname{Im}(\omega),$$

$$\varphi(-\omega) = \operatorname{arctg} \frac{-\operatorname{Im}(\omega)}{\operatorname{Re}(\omega)} = -\varphi(\omega).$$

Примеры АФХ и АЧХ

Примеры частотных характеристик реальных объектов



С изменением частоты колебаний амплитудно- и фазочастотные характеристики меняются по определенному закону в зависимости от Физических свойств объекта. Однако все реальные физические системы обладают одним общим свойством, которое заключается в том, что при увеличении частоты входных колебаний выше некоторого предела $\omega_{\text{ср}}$ объект практически не реагирует на эти колебания, т.е. амплитуда выходных колебаний равна нулю.

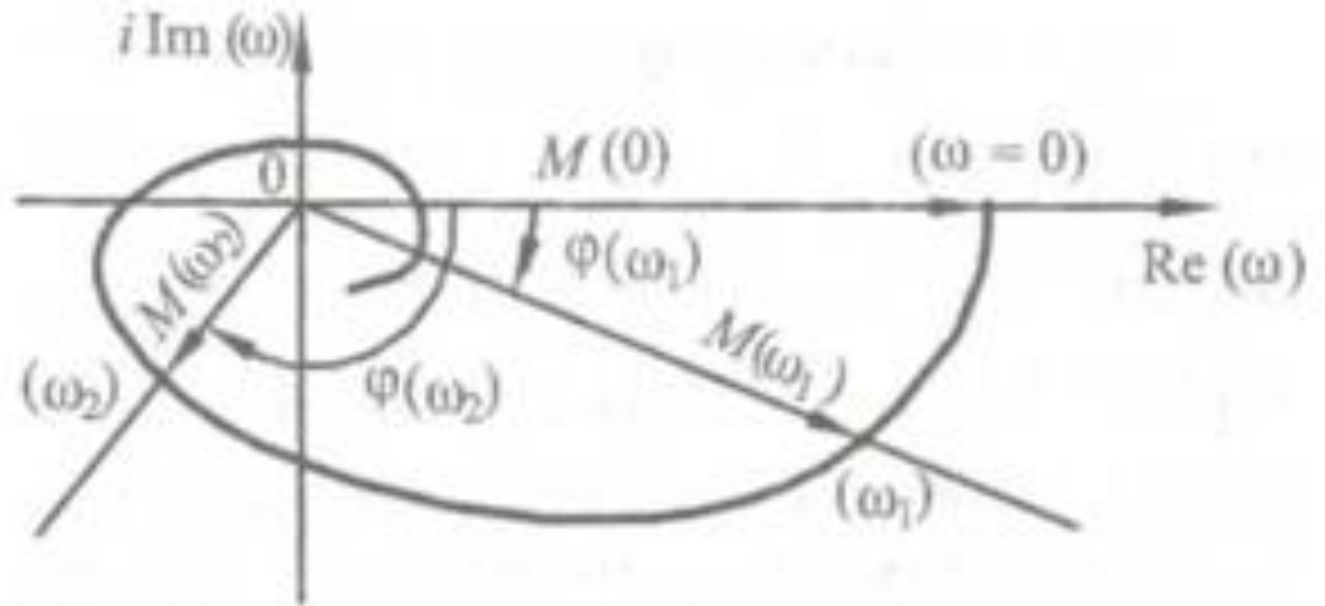
Т.о. для любого реального объекта:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} M(\omega) = 0.$$

Пример АФХ

Амплитудно-фазовая характеристика (АФХ) $W(i\omega)$ строится в плоскости комплексного переменного и представляет собой годограф вектора, модуль и аргумент которого $M(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ изменяются в зависимости от частоты.

Показано построение нескольких точек $W(i\omega)$ и пример амплитудно-фазовой характеристики реального объекта.



Физический смысл ЧХ

Рассмотрим динамическое звено с передаточной функцией $W(s)$ и импульсной характеристикой $w(t)$ (чаще обозначают $g(t)$), на вход которого подаем гармонический сигнал $X_{\text{вх}}(t)$.

Решение линейного ДУ динамического звена, состоит из двух составляющих – свободной и установившейся.

Установившаяся составляющая в случае гармонической функции времени, стоящей в правой части уравнения, так же является гармонической функцией времени



Установившийся сигнал на выходе динамического звена опишем: $X_{\text{выхуст}} = B e^{j(\omega t + \varphi)}$

Сигнал на выходе звена на с основ теоремы об умножении изображений:

Тогда:

$$W(j\omega) = \frac{X_{\text{выхуст}}}{X_{\text{вх}}(t)} = \frac{B e^{j(\omega t + \varphi)}}{A e^{j\omega t}} = \frac{B}{A} e^{j\varphi}$$

$$X_{\text{вых}}(t) = X_{\text{вх}}(t) \int_0^t e^{-j\omega \tau} w(\tau) d\tau$$

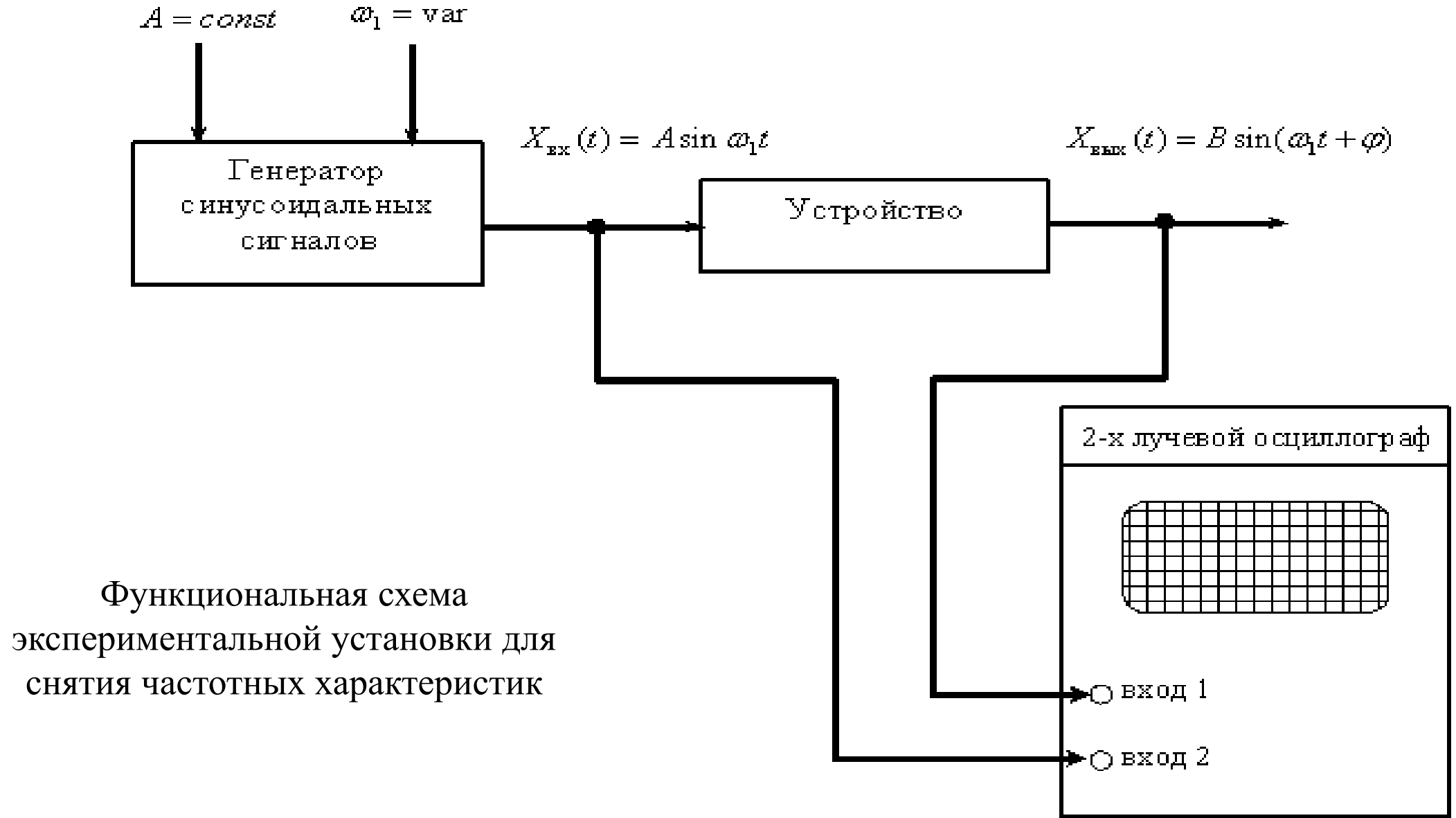
Алгоритм определения ЧХ

Алгоритм экспериментального определения частотной характеристики линейного динамического звена, объекта или системы управления для конкретной частоты ω_1 :

1. Подать на вход объекта синусоидальный сигнал частоты ω_1 и постоянной амплитуды.
2. Дождаться затухания свободной составляющей переходного процесса.
3. Измерить амплитуду выходного сигнала и сдвиг его по фазе относительно входного сигнала.
4. Отношение амплитуды выходного установившегося сигнала к амплитуде входного сигнала определит модуль частотной характеристики при частоте ω_1 .
5. Сдвиг фазы выходного сигнала относительно входного сигнала определит угол (аргумент) частотной характеристики при частоте ω_1 .

Применяя данный алгоритм для частот от нуля до бесконечности, можно экспериментальным путем определить частотную характеристику конкретного устройства.

Функциональная схема установки



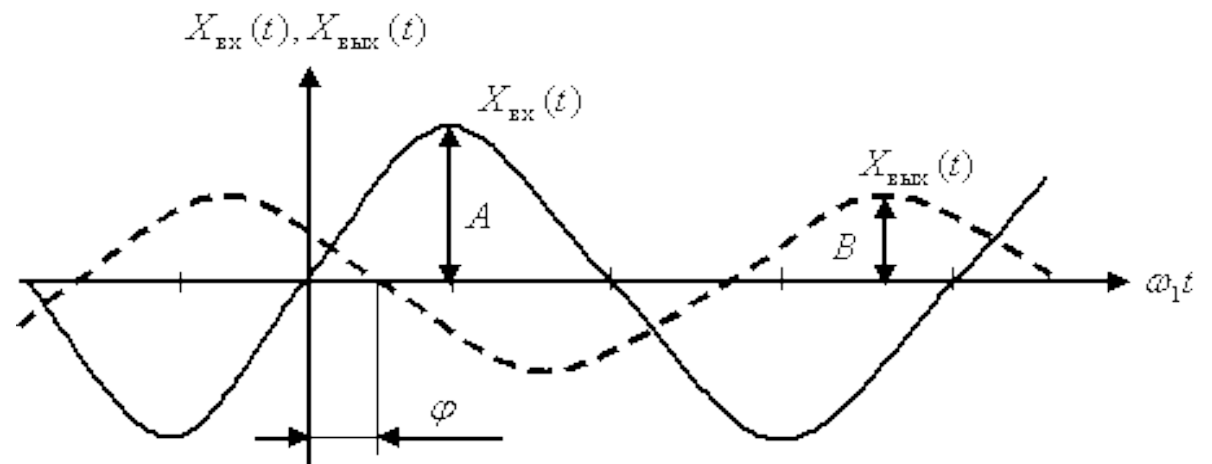
Функциональная схема
экспериментальной установки для
снятия частотных характеристик

Работа экспериментальной установки

При частоте ω_1 на экране осциллографа после затухания свободной составляющей получаем:

Физический смысл частотной характеристики:

ЧХ показывает, во сколько раз изменяет динамическое звено (устройство), работающее в установившемся режиме, амплитуду входной синусоиды частоты ω , и на какой угол сдвигает входную синусоиду по фазе.

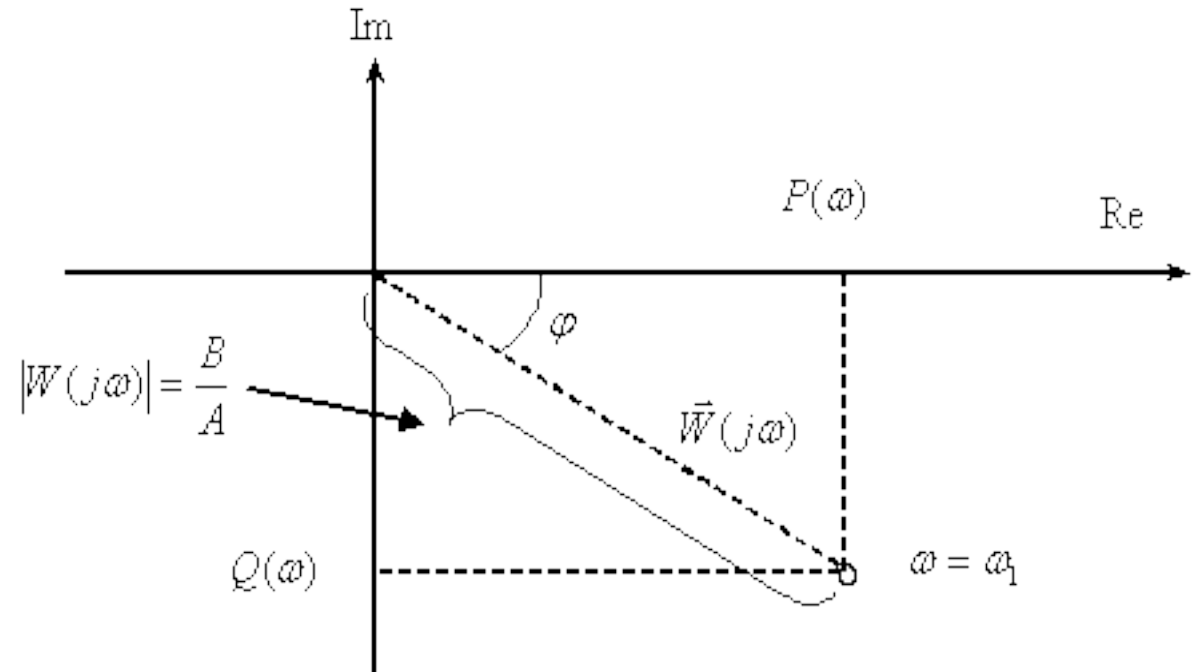


Для экспериментального получения частотных характеристик различных объектов в инженерной практике используют персональные компьютеры, оснащенные специализированными платами ввода-вывода и пакетами прикладных программ.

Графическая интерпретация

На комплексной плоскости можно построить точку, принадлежащую частотной характеристике устройства.

Совокупность точек при изменении частоты от нуля до величины, когда амплитуда выходного установившегося сигнала станет пренебрежимо мала, представляет собой амплитудно-фазовую частотную характеристику (АФЧХ).



Таким образом может быть построена любая необходимая частотная характеристика устройства.

Связь между динамическими характеристиками

Каждый из способов описания динамических характеристик имеет свои достоинства, определяющие область его применения (возможность и относительная простота экспериментального определения одних характеристик, общность и удобство использования для математических выкладок и расчетов других).

Основными формами представления динамических характеристик являются:

- передаточная функция;
- частотные характеристики: амплитудно-частотная, фазочастотная и амплитудно-фазовая;
- переходные характеристики: кривая разгона и импульсные характеристики.

Любая из рассмотренных характеристик может быть определена, если известно дифференциальное уравнение объекта.

Передаточная функция определяется с использованием преобразования Лапласа, амплитудно-фазовая характеристика – при переходе в область комплексного переменного, уравнение кривой разгона является решением неоднородного ДУ при постоянной правой части.

Импульсная переходная функция (ИПФ)

Существуют методы определения коэффициентов ДУ по экспериментальным динамическим характеристикам, например, по кривой разгона.

Амплитудно- и фазо-частотные характеристики и кривую разгона можно определить экспериментально по ИПФ.

Дельта функция $\delta(t)$ есть производная от единичной ступенчатой функции $\delta(t) = I'(t)$, тогда изображение по Лапласу от $\delta(t)$:

$$L\{\delta(t)\} = pL\{1(t)\} = p \cdot 1/p = 1.$$

ИПФ связана с дельта функцией соотношением: $L\{g(t)\} = L\{\delta(t)\}W(p) = W(p)$,

Изображение по Лапласу от ИПФ есть передаточная функция объекта.

Если дельта-функция является производной от единичного скачка, то вследствие линейности объекта ***ИПФ является производной от кривой разгона***, т.е.

$$g(t) = h'(t) \Rightarrow h(t) = \int_0^t g(\lambda) d\lambda .$$

Определение коэффициента усиления

Коэффициент усиления линейного объекта можно определить по его динамическим характеристикам.

Согласно определению коэффициент усиления равен отношению выходной координаты объекта к входной в установившемся режиме.

По ДУ объекта **коэффициент усиления** определяется после приравнивания нулю всех членов, содержащих производные по времени $a_0 y(t) = b_0 x(t)$.

По формуле передаточной функции её отбрасывают члены, содержащие p , получаем $W(p) = y(p)/x(p) = b_0/a_0$.

В формуле для АФХ отбрасываются члены, содержащие $i\omega$ – $W(i\omega) = b_0/a_0$.

То же соотношение можно получить и другим способом: если известна кривая разгона системы $h(t)$, снятая при ступенчатом возмущении величиной A , то коэффициент усиления равен отношению

$$k = \frac{h(\infty)}{A} = \frac{1}{A} \lim_{t \rightarrow \infty} h(t).$$

Определение коэффициента усиления

По теореме о конечном значении функции

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p h(p), \quad \text{где} \quad h(p) = W(p) = W(p) A / p,$$

Следовательно

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p W(p) A / p = A \lim_{p \rightarrow 0} W(p)$$

и при единичном возмущении ($A = 1$) получаем, что коэффициент усиления объекта равен пределу его передаточной функции при $p \rightarrow 0$ или $k = b_0/a_0$.

Т.к. кривая разгона есть интеграл от ИПФ

$$h(\infty) = A \int_0^{\infty} g(t) dt \Rightarrow k = \int_0^{\infty} g(t) dt,$$

т.е. коэффициент усиления равен площади, ограниченной кривой ИПФ.

Описание объекта управления

Дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} a_n y^{(n)}(t) + \dots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) \\ = b_m y^{(m)}(t) + \dots + b_1 y'(t) + b_0 y(t). \end{aligned}$$

При нулевых начальных условиях:

$$\begin{aligned} A(p)y(p) &= B(p)x(p) \\ A(p) &= a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0 \\ B(p) &= b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0. \end{aligned}$$

Связь между характеристиками

Исходные данные	$\frac{B(p)}{A(p)} = W(p)$	$W(i\omega)$	$h(t)$	$g(t)$
Передаточная функция $W(p)$	—	—	$L\{h(t)\}p$	$L\{g(t)\}$
Амплитудно-фазовая характеристика $W(i\omega)$	$p = i\omega$	—	$\Phi\{h(t)\}i\omega$	$\Phi\{g(t)\}$
Кривая разгона $h(t)$	$L^{-1}\left\{\frac{W(p)}{p}\right\}p$	$\Phi^{-1}\left\{\frac{W(i\omega)}{i\omega}\right\}$	—	$\int_0^t g(\lambda)d\lambda$
Импульсная переходная функция $g(t)$	$L^{-1}\{W(p)\}p$	$\Phi^{-1}\{W(i\omega)\}$	$h'(t)$	—

Еще раз о частотной передаточной функции

Частотная передаточная функция, определяет реакцию звена на гармонические колебания всех возможных частот и позволяет, пользуясь принципом суперпозиции, найти реакцию линейного звена на произвольное воздействие.

Частотная передаточная функция является важнейшей динамической характеристикой звена и представляет собой отношение изображений по Фурье выходного и входного сигналов при нулевых начальных условиях и равных нулю воздействиях на остальных входах:

$$W(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}.$$

Из сравнения преобразований Фурье и Лапласа следует, что частотную передаточную функцию звена легко получить из его передаточной функции путем замены s на $j\omega$, т.е.

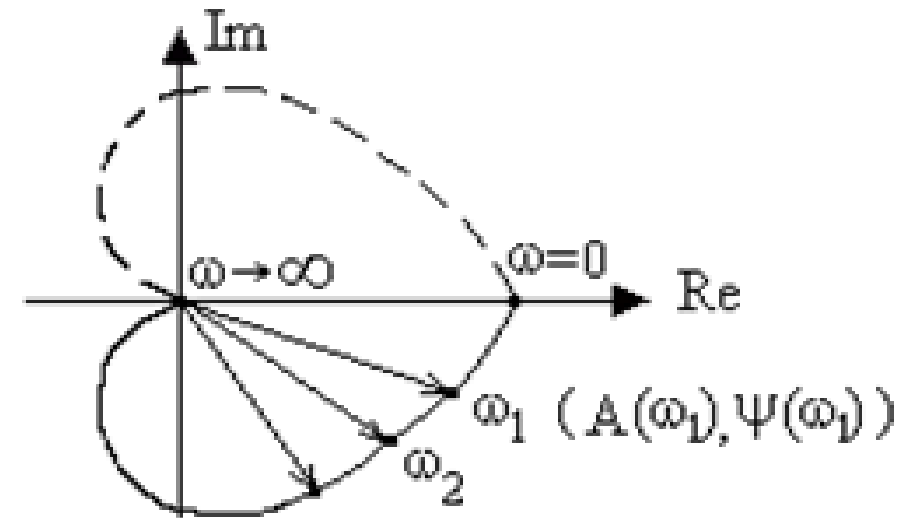
$$W(j\omega) = W(s) \Big|_{s = j\omega}.$$

Еще раз Амплитудно-фазовая частотная характеристика

АФЧХ строится как для положительных, так и для отрицательных частот.

При замене в $W(j\omega)$ ω на $-\omega$ получается сопряженная комплексная величина. Поэтому АФЧХ для отрицательных частот является зеркальным отображением относительно вещественной оси АФЧХ для положительных частот.

Длина вектора, проведенного из начала координат в точку АФЧХ, соответствующую выбранной частоте ω , равна $A(\omega)$, а угол между вектором и положительным направлением вещественной оси равен $\psi(\omega)$.



АФЧХ для отрицательных частот показана пунктирной линией.