Основы теории управления

д.т.н. Мокрова Наталия Владиславовна

пятница	ауд. 119
14:35 - 16:05	Лекция
16:20 - 17:50	Лабораторная работа

Лекция 4.
Типовые динамические звенья

Типовые динамические звенья:

- идеальное усилительное звено;
- апериодические звенья первого и второго порядков;
- колебательное звено, консервативное звено;
- идеальное интегрирующее звено;
- идеальное дифференцирующее звено;
- дифференцирующее звено первого порядка и второго порядка;
- звено чистого запаздывания.

Важные комбинации типовых звеньев.

Характеристики типовых динамических звеньев.

Типовые динамические звенья

Типовые динамические звенья – минимально необходимый набор звеньев для описания системы управления произвольного вида.

Типы звеньев различаются по виду их передаточной функции (или ДУ).

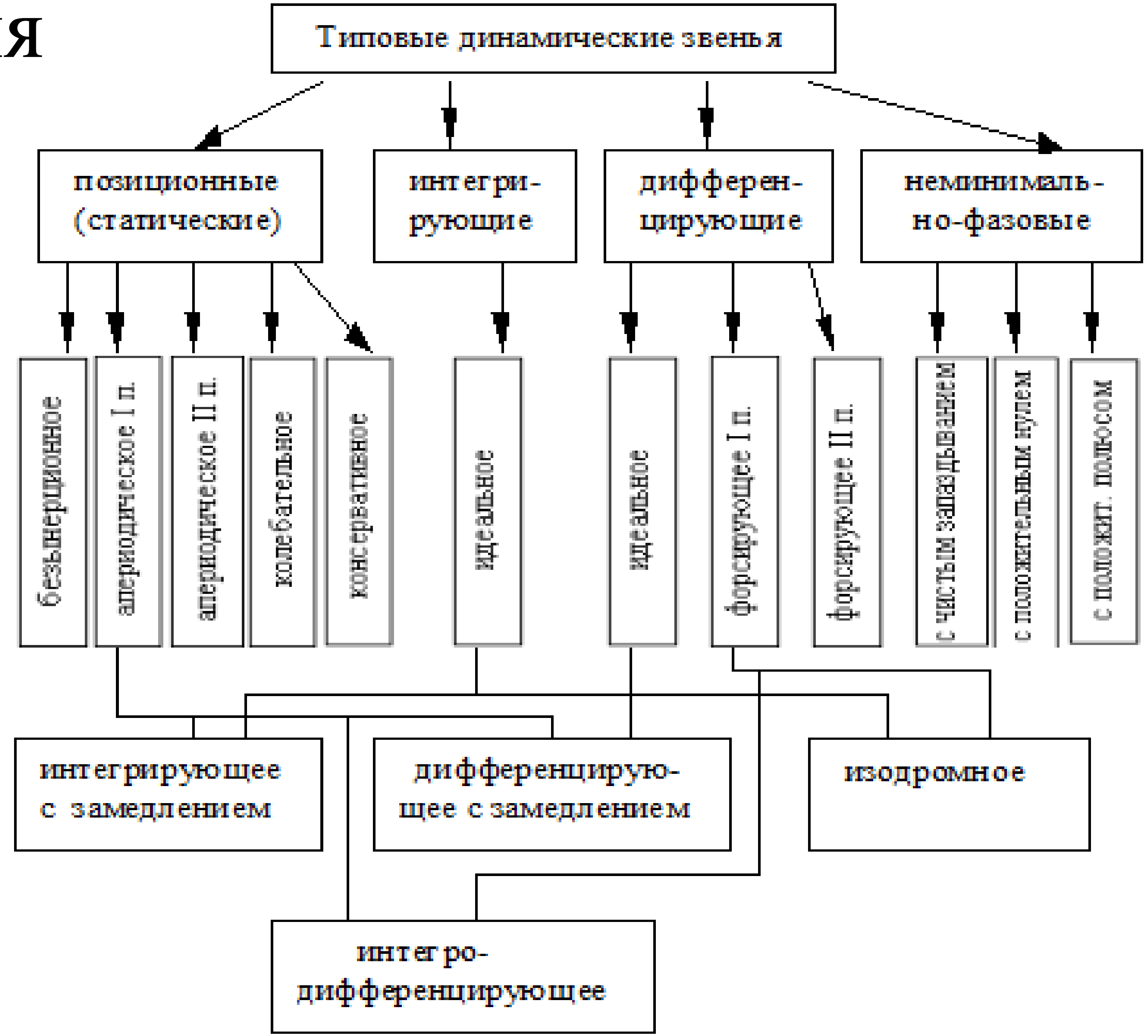
Основные типы звеньев:

- позиционные,
- интегрирующие,
- Дифференцирующие,
- неминимально-фазовые.

Позиционные, интегрирующие и дифференцирующие звенья относятся к минимально-фазовым.

Важным свойством минимально-фазовых звеньев является однозначное соответствие амплитудной и фазовой частотных характеристик (по заданной амплитудной характеристике всегда можно определить фазовую и наоборот).

Классификация типовых динамических звеньев



Объект управления и типовые звенья

Реальные промышленные объекты регулирования являются сложными системами.

В ряде случаев при их исследовании можно не учитывать нелинейные свойства этих объектов и распределенность параметров, т.е. рассматривать их как линейные динамические системы с сосредоточенными параметрами. При таком упрощении любой объект может быть представлен как сочетание определенным образом связанных между собой простейших детектирующих звеньев.

Для типовых звеньев будем рассматривать характеристики:

- уравнение звена и пример его физической модели;
- передаточную функцию;
- частотные характеристики;
- кривую разгона и импульсную переходную функцию.

Позиционные звенья

В звеньях позиционного (статического) типа, линейной зависимостью $y = kx$ связаны выходная и входная величины в установившемся режиме.

Коэффициент пропорциональности k представляет собой коэффициент передачи звена.

Позиционные звенья обладают свойством самовыравнивания (способностью самостоятельно переходить в новое установившееся состояние при ограниченном изменении входного воздействия).

Идеальное усилительное звено

Безынерционное (идеальное усилительное) звено – звено, которое не только в статике, но и в динамике описывается алгебраическим уравнением $y(t) = kx(t)$.

Передаточная функция: $W(s) = k$.

Амплитудно-фазовая частотная характеристика:

$$W(j\omega) = k,\ \ A(\omega) = k,\ \ \psi(\omega) = 0.$$

Переходная и импульсная функции:

$$h(t) = k1(t),\quad g(t) = k\delta(t).$$

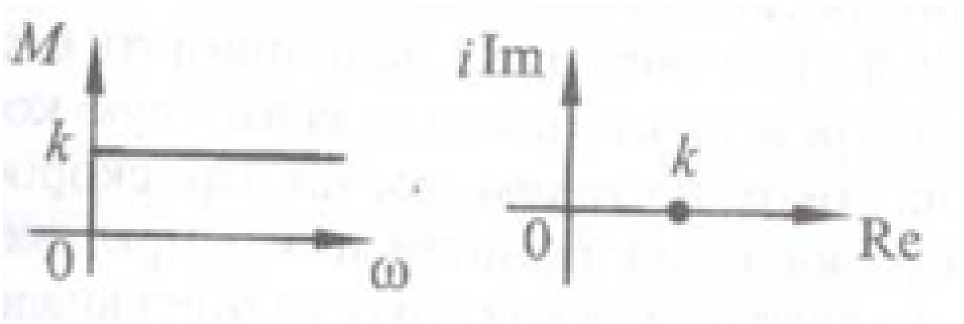
Безынерционное звено является некоторой идеализацией реальных звеньев (реально ни одно звено не в состоянии равномерно пропускать все частоты от 0 до ∞).

Примерами безынерционных звеньев могут служить жесткая механическая передача, часовой редуктор, электронный усилитель сигналов на низких частотах и др.

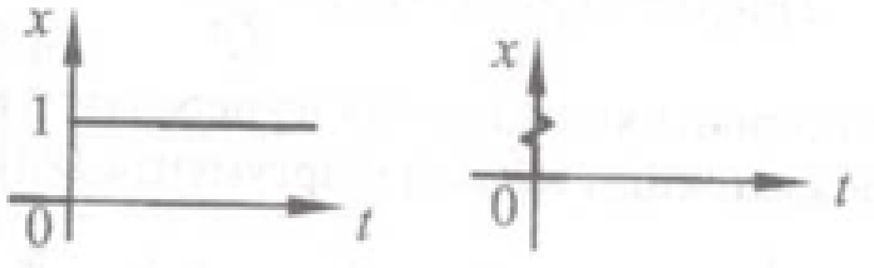
Усилительное звено, не изменяя фазы гармонических колебаний, поданных на его вход, изменяет их по амплитуде в *к* раз.

Графики частотных характеристик

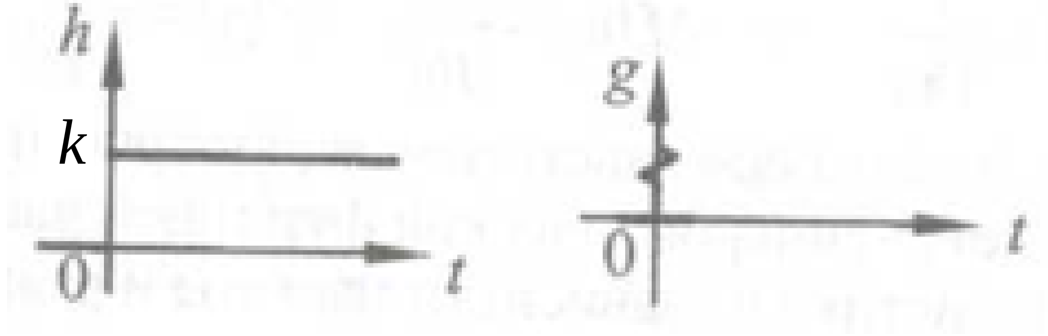
Частотные характеристики усилительного звена



Уравнение движения звена



Кривая разгона усилительного звена и его импульсная переходная функция



Интегрирующее звено

В звеньях интегрирующего типа линейной зависимостью $\frac{dy}{dx} = x$ связаны в установившемся режиме производная выходной величины и входная величина.

Для установившегося режима справедливым равенство $y(t) = \frac{1}{T}\int_0^t x(t)dt$ (отсюда название типа звеньев).

Выходной сигнал интегрирующего звена равен интегралу по времени от входного сигнала, умноженному на передаточный коэффициент.

Интегрирующим звеном является гидравлическая емкость. Если принять в качестве выходной координаты уровень в емкости, а за входную координату – разность между притоком и стоком, то, так как скорость изменения уровня пропорциональна разности между притоком и стоком жидкости, уравнение гидравлической емкости будет аналогично уравнению $Ty'(t) = x(t)$.

Характеристики интегрирующего звена

Идеальное интегрирующее звено

Уравнение и передаточная функция имеют вид $Tpy(t) = x(t), W(s) = \frac{1}{Ts}$.

Амплитудно-фазовая частотная характеристика:

$$W(i\omega) = -i\frac{1}{T\omega}, A(\omega) = \frac{1}{T\omega}, \varphi(\omega) = -90^0.$$

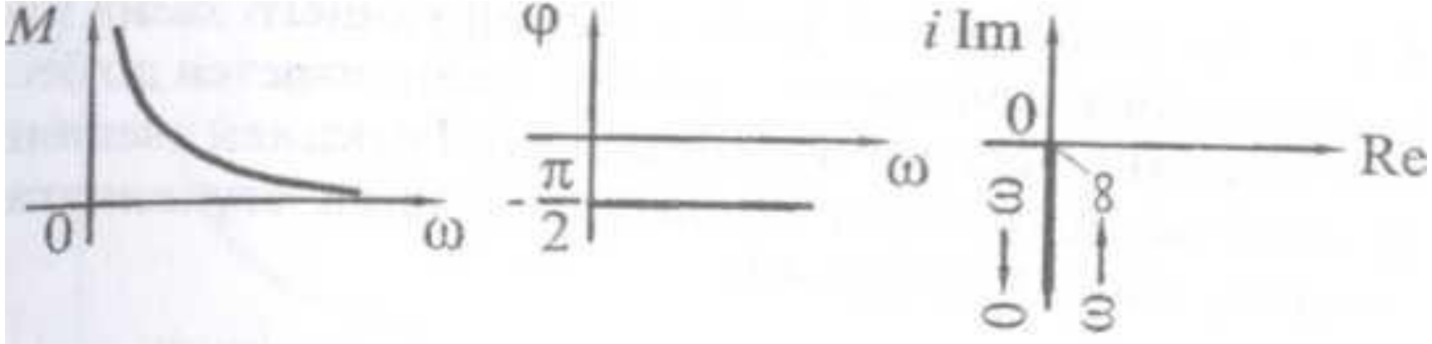
Переходная и импульсная функции: $h(t) = t/T, g(t) = 1/\mathrm{T}$.

Такое звено является идеализацией реальных интегрирующих звеньев.

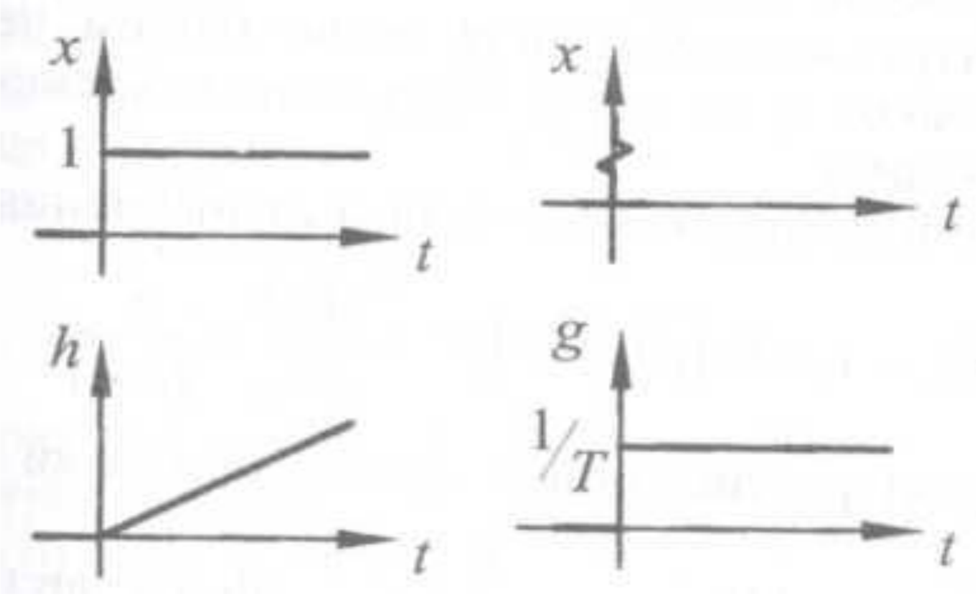
Примерами идеальных интегрирующих звеньев могут служить операционный усилитель в режиме интегрирования, гидравлический двигатель, емкость и др.

Графики частотных характеристик

Частотные характеристики интегрирующего звена – (АЧХ, ФЧХ, АФХ)



Входные сигналы $x(t)$ и переходные функции интегрирующего звена (кривая разгона, ИПФ)



При подаче на вход интегрирующего звена постоянного возмущения выходная координата увеличивается до бесконечности с постоянной скоростью
Реакцией звена на мгновенный импульс единичной площади является ступенчатая функция с амплитудой 1/Т.

Апериодические звенья

В названии отражены характерные особенности: порядок описывающего звено ДУ и апериодический (в отличие от интегрирующего звена) характер переходных процессов.

Апериодическое (инерционное) звено первого порядка

В общем случае эти уравнения оказываются нелинейными, но после линеаризации в малой окрестности заданных координат стационарного состояния получаем линейные дифференциальные уравнения вида

$$\mathrm{T}y'(t) + y(t) = kx(t),$$

где T – постоянная времени звена, $T > 0$; k – коэффициент усиления.

Постоянная времени зависит от величины сопротивления и емкости и характеризует инерционность звена, причем, чем больше сопротивление и емкость, тем больше постоянная времени и больше инерционность звена.

Апериодическое звено первого порядка

Характеристики звена

Уравнение и передаточная функция звена: $(Tp + 1)\, y(t) = kx(t), \quad W(s) = \frac{k}{Ts+1}$

где T – постоянная времени, характеризует степень инерционности звена, т.е. длительность переходного процесса.

Амплитудно-фазовая частотная характеристика: $W(i\omega) = \frac{k}{Ti\omega+1}, \Rightarrow$

$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{T^2\omega^2+1}}, \qquad \varphi(\omega) = -\mathrm{arctg}\, T\varphi.$$

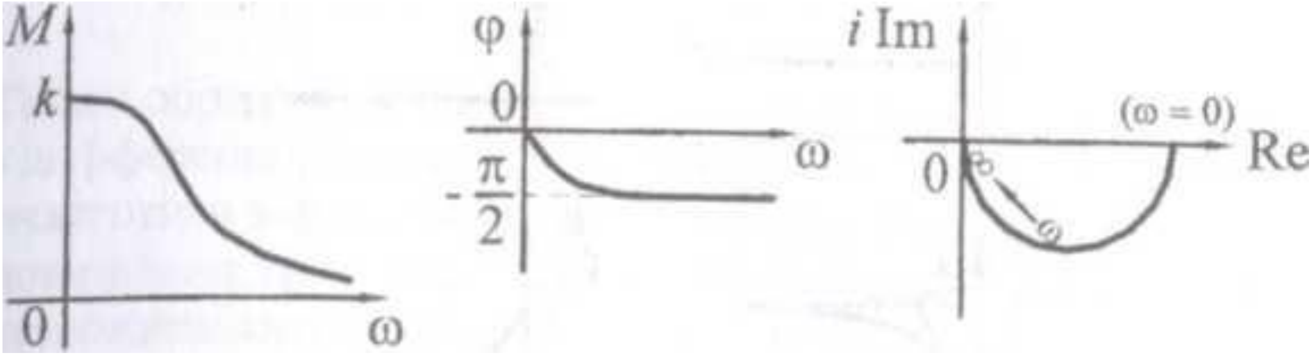
Fпериодическое звено первого порядка является фильтром низких частот.

Переходная и импульсная функции: $h(t) = k\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right), \mathrm{g}(t) = \frac{k}{T} e^{-\frac{t}{T}}$

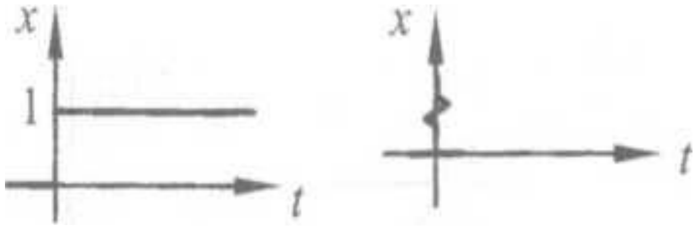
Примерами апериодического звена первого порядка могут служить RC цепочка, нагревательный элемент и др.

Графики частотных характеристик

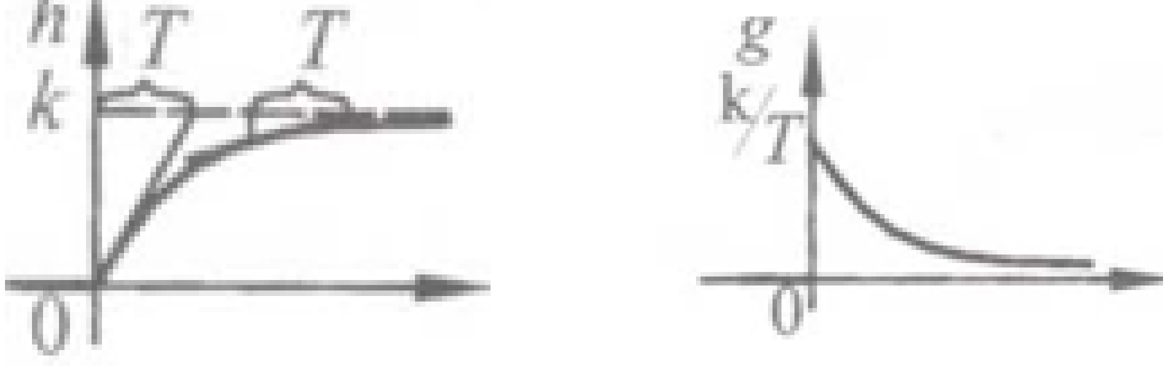
Частотные характеристики апериодического звена первого порядка (АЧХ, ФЧХ, АФХ)



Входные сигналы $x(t)$



Переходные функции апериодического звена первого порядка (кривая разгона, ИПФ)



Связь k и T

Переходные функции апериодического звена первого порядка представляют собой монотонные функции времени.

Они обладают следующим отличительным свойством:

отрезок времени t^*, заключенный между точками пересечения с асимптотой перпендикуляра к ней и касательной к кривой, проведенными из любой точки $h\{t)$ (или) $g(t)$, есть константа, равная постоянной времени T.

На примере кривой разгона

$$t^* = \frac{k - h(t)}{h'(t)} = \frac{k - k + e^{-t/T} \cdot k}{\frac{k}{T} e^{-t/T}} = T.$$

Апериодическое звено второго порядка

Дифференциальное уравнение звена имеет вид $(T_2^2 p^2 + T_1 p + 1) y(t) = x(t)$

предполагается, что $2T_2 \leq T_1$.

В этом случае корни характеристического уравнения вещественные и уравнение можно переписать в виде: $(T_3 p+1)(T_4 p+1)\, y(t) = x(t)$,

где $T_3, T_4 = \frac{T_1}{2} \pm \sqrt{\frac{T_1^2}{4} - T_2^2}$ – новые постоянные времени.

Передаточная функция звена $W(s) = \frac{1}{(T_3 s+1)(T_4 s+1)}$.

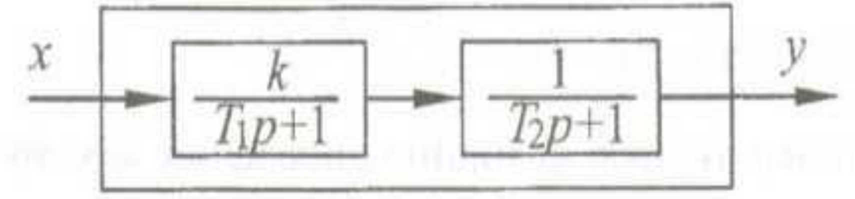
Апериодическое звено второго порядка можно рассматривать как комбинацию двух апериодических звеньев первого порядка.

Примерами апериодического звена второго порядка могут служить двойная RC цепочка, электродвигатель постоянного тока и др.

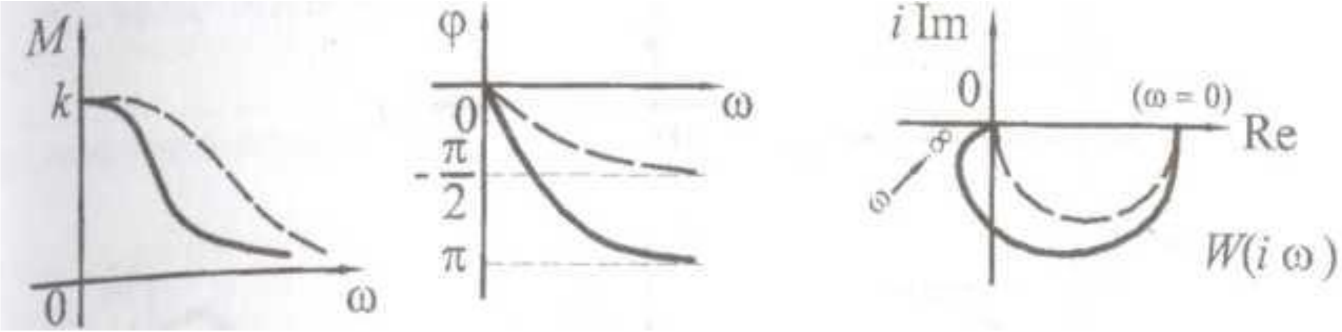
!Не указан коэффициент усиления.

Звенья второго порядка

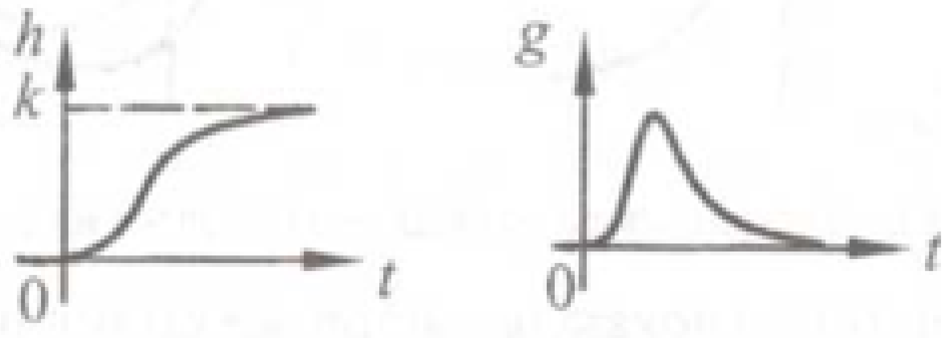
Структурная схема апериодического звена второго порядка



Частотные характеристики апериодического звена второго порядка (пунктиром показаны частотные характеристики звена первого порядка с коэффициентом усиления *k* и постоянной времени T_1).



Кривая разгона и ИПФ апериодического звена второго порядка



Колебательное звено

Описывается дифференциальным уравнением $(T_2^2 p^2 + T_1 p + 1) y(t) = x(t)$

при $T_1 < 2T_2$ корни характеристического уравнения комплексные и уравнение переписывают в виде

$$\left(T^2 p^2 + 2\xi T p + 1\right) y(t) = x(t).$$

где T – постоянная времени, определяющая угловую частоту свободных колебаний $\lambda = 1/T$;

ξ – параметр затухания, лежащий в пределах $0 < \xi < 1$.

Общепринятая запись передаточной функции колебательного звена имеет вид

$$W(s) = \frac{1}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1}.$$

Амплитудно-фазовая частотная характеристика звена: $W(i\omega) = \frac{1}{T^2 (i\omega)^2 + 2\xi T i\omega + 1}.$

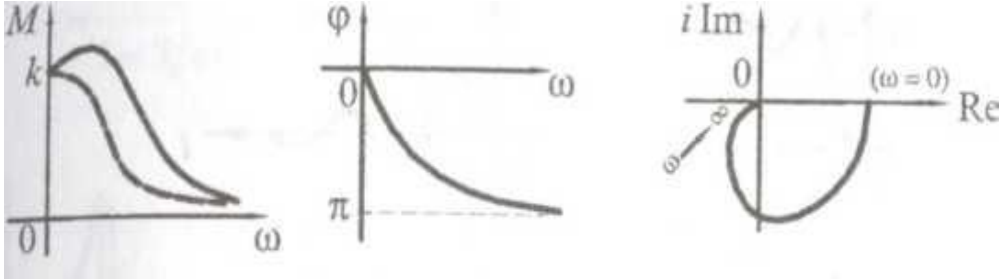
$$\mathrm{A}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - T^2 \omega^2\right)^2 + 4(\xi T\omega)^2 + 1}}, \psi(\omega) = -arctg \frac{2\xi T\omega}{1 - T^2 \omega^2}.$$

Временные характеристики представляют собой затухающие периодические процессы.

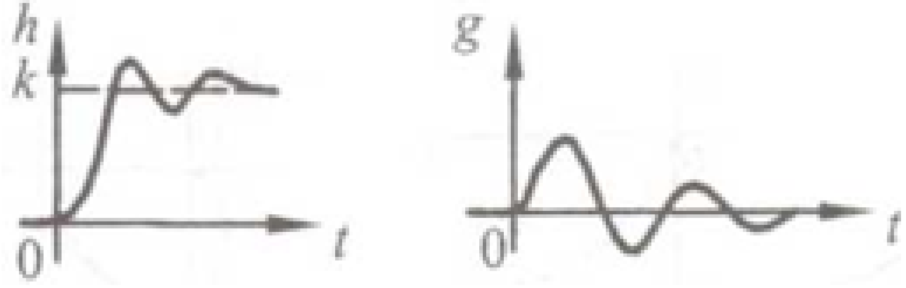
Примерами колебательного звена могут служить электрический колебательный контур, электродвигатель постоянного тока, маятник и др.

Графики частотных характеристик

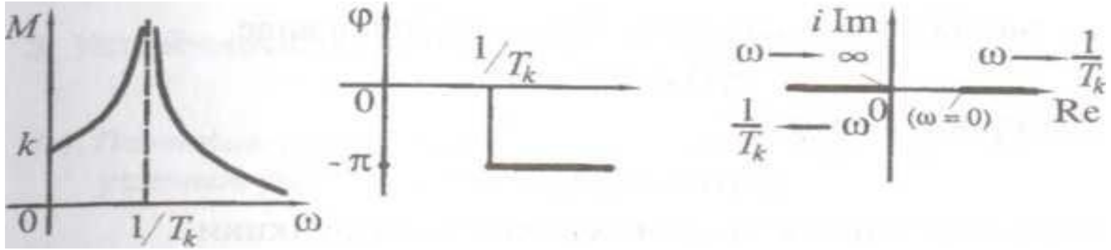
Частотные характеристики колебательного звена



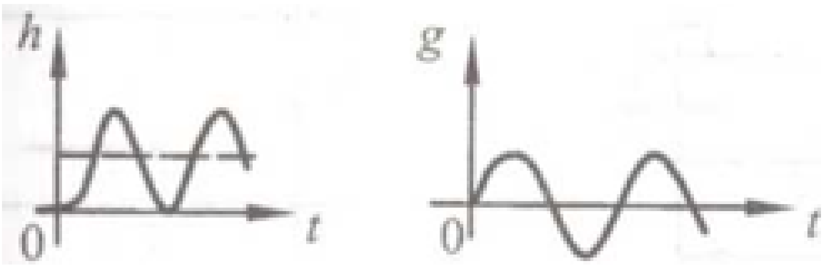
Переходные функции колебательного звена (кривая разгона, ИПФ).



Частотные характеристики консервативного звена



Переходные функции консервативного звена



Консервативное звено

Консервативное звено является частным случаем колебательного при $\xi = 0$ представляет собой идеализированный случай, когда можно пренебречь влиянием рассеяния энергии в звене.

Амплитудно-фазовая характеристика совпадает с вещественной осью. При $0 < \omega < 1/T$ характеристика совпадает с положительной полуосью, а при $\omega > 1/T$ – с отрицательной полуосью.

Временные характеристики соответствуют незатухающим колебаниям с угловой частотой $1/T$.

Дифференцирующие звенья

В звеньях дифференцирующего типа линейной зависимостью $y(t) = T\frac{dx}{dt}$ связаны в установившемся режиме выходная величина и производная входной, откуда и произошло название этого типа звеньев.

Идеальное дифференцирующее звено

Уравнение и передаточная функция имеют вид $y(t) = Tpx(t), \quad W(s) = Ts$.

Амплитудно-фазовая частотная характеристика: $W(j\omega) = Ti\omega = T\omega e^{i\frac{\pi}{2}}$,

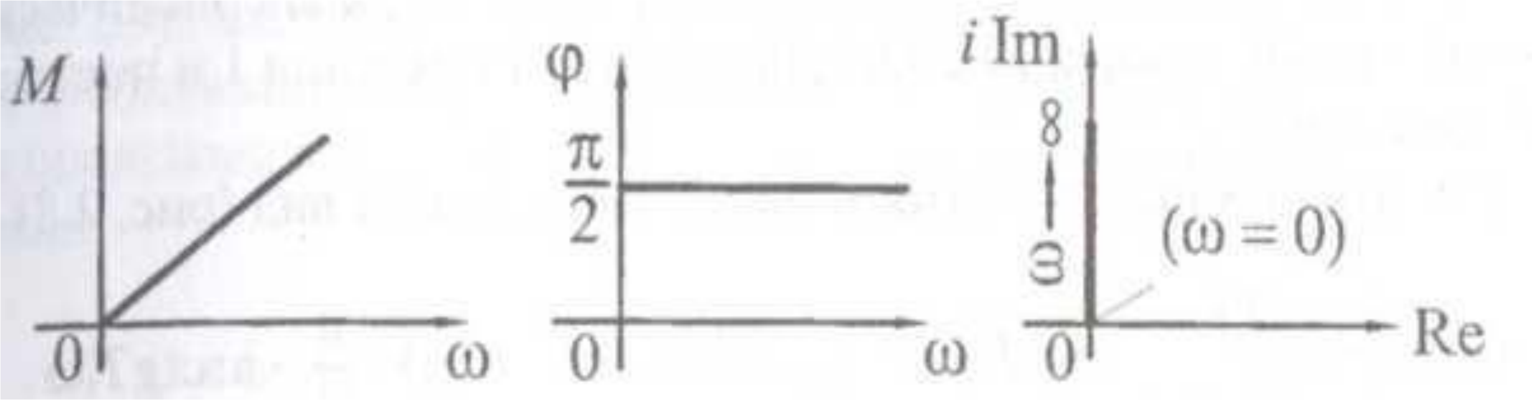
$$A(\omega) = T\omega,\ \varphi(\omega) = +\ 90^0.$$

Переходная функция: $h(t) = T\delta(t)$.

Такое звено является идеализацией реальных дифференцирующих звеньев.

Графики частотных характеристик

Частотные характеристики идеального дифференцирующего звена



Примеров идеальных дифференцирующих звеньев в природе не существует (амплитудно-частотная характеристика увеличивается до бесконечности с ростом частоты, т.о. при постоянной амплитуде входного гармонического сигнала с увеличением частоты возрастает и амплитуда выходного сигнала).

Реальное дифференцирующее звено

Реальное дифференцирующее звено описывается уравнением вида $T_2y'(t) + y(t) = T_1x'(t)$.

Передаточная функция: $y(p)(T_2p + 1)\, y(t) = T_1px(p), \quad W(p) = \frac{T_1p}{T_2p+1}$.

Реальное дифференцирующее звено не является элементарным и может рассматриваться как последовательное соединение двух звеньев: идеального дифференцирующего с постоянной дифференцирования T_1 и апериодического звена первого порядка с коэффициентом усиления 1 и постоянной времени T_2.

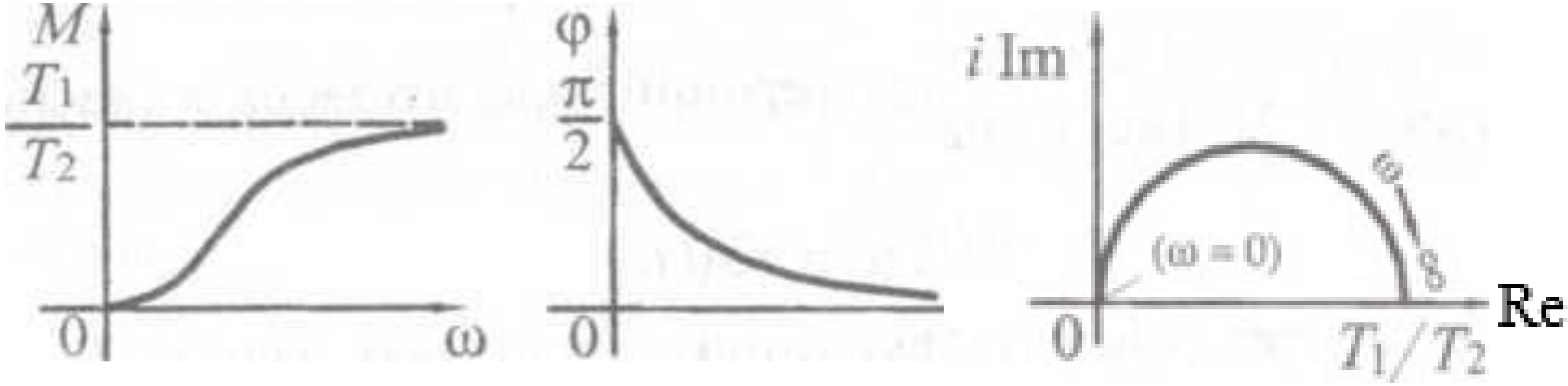
Частотные характеристики: $W(i\omega) = \frac{T_1 i\omega}{T_2 i\omega+1} \Longrightarrow$

$$A(\omega) = \frac{T_1\omega}{\sqrt{(T_2 i\omega + 1)^2 + 1}}, \varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - arctg T_2\omega.$$

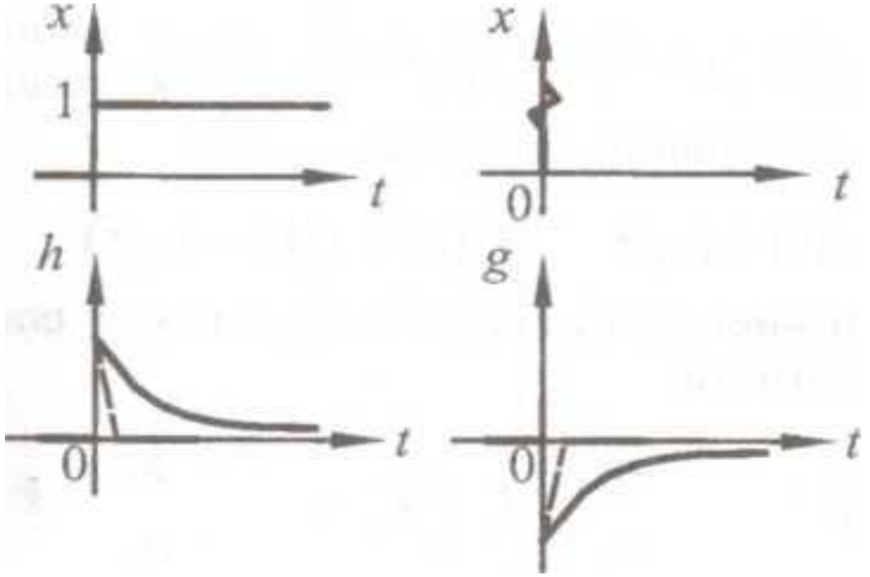
Кривая разгона и импульсно переходная функция ($t > 0$): $h(t) = \frac{T_1}{T_2} e^{-\frac{t}{T_2}}, \; g(p) = -\frac{T_1}{T_2} e^{-\frac{t}{T_2}}$.

Графики частотных характеристик

Частотные характеристики реального дифференцирующего звена (АЧХ, ФЧХ, АФХ)



Входные сигналы и переходные функции дифференцирующих звеньев



Примером звена является «RC»-цепочка, если для нее в качестве входной координаты принять входное напряжение, а за выходную координату – силу тока в цепи.

Дифференцирующее звено первого порядка

Форсирующее (дифференцирующее) звено первого порядка

Дифференциальное уравнение и передаточная функция

$$y(t) = (\tau p+1)\, x(t)\ ,\ \ W(s) = \tau s+1,$$

где τ – постоянная времени дифференцирования.

Амплитудно-фазовая частотная характеристика:

$$W(i\omega) = (i\omega\tau + 1),\quad A(\omega)=\sqrt{1+\tau^2\omega^2}, \varphi(\omega) = arctg(\omega\tau).$$

Переходная и импульсная функции:

$$h(t) = 1(t) + \tau\delta(t),\qquad g(t) = \delta(t) + \tau\frac{d\delta}{dt}.$$

Дифференцирующее звено второго порядка

Уравнение и передаточная функция звена:

$$y(t) = (\tau^2 p^2 + 2\xi\tau p + 1)x(t),\ \ W(s) = \tau^2 s^2 + 2\xi\tau s + 1.$$

Амплитудно-фазовая частотная характеристика:

$$W(i\omega) = (1-\omega^2\tau^2) + i2\xi\omega\tau,$$

$$A(\omega) = \sqrt{(1-\tau^2\omega^2)^2 + 4(\xi\tau\omega)^2 + 1},$$

$$\varphi(\omega) = arctg\,\frac{2\xi\tau\omega}{1-\tau^2\omega^2}.$$

Переходная и импульсная функции:

$$h(t) = \tau^2\frac{d\delta}{dt} + 2\xi\tau\delta(t) + 1(t),$$

$$g(t) = \tau^2\frac{d^2\delta}{dt} + 2\xi\tau\frac{d\delta}{dt} + \delta(t).$$

Важные комбинации типовых звеньев

Дифференцирующее звено с замедлением или инерционное дифференцирующее звено представляет собой комбинацию идеального дифференцирующего и апериодического звена первого порядка. Уравнение и передаточная функция звена:

$$(Tp + 1)\, y(t) = px(t),\ W(s) = \frac{s}{Ts+1},$$

$$p(Tp + 1)\, y(t) = x(t),\ W(s) = \frac{s}{s(Ts+1)},$$

Изодромное звено представляет собой комбинацию идеального интегрирующего и форсирующего звена первого порядка. Уравнение и передаточная функция звена:

$$p(Tp + 1)\, y(t) = (\tau p + 1)x(t),\ W(s) = \frac{\tau s+1}{s},$$

Интегро-дифференцирующее звено представляет собой комбинацию форсирующего звена первого порядка и апериодического звена первого порядка. Уравнение и передаточная функция звена:

$$(Tp + 1)\, y(t) = (\tau p + 1)x(t),\ W(s) = \frac{\tau s+1}{Ts+1}.$$

Неминимально-фазовые звенья

Неминимально-фазовые звенья – звенья, которые, в отличие от обычных типовых звеньев, при равенстве амплитудных частотных характеристик имеют большие по абсолютному значению фазовые сдвиги. Одной амплитудной частотной характеристике неминимально-фазовых звеньев может соответствовать несколько различных фазовых частотных характеристик.

Звено с чистым запаздыванием

Звено с чистым запаздыванием – звено, у которого выходная величина повторяет входную с некоторой задержкой во времени.
Уравнение и передаточная функция звена:

$$y(t) = x(t - \tau), \qquad W(s) = e^{-\tau s} \cong 1 - \tau s + \frac{(\tau s)^2}{2!} - \frac{(\tau s)^3}{3!} + \cdots,$$

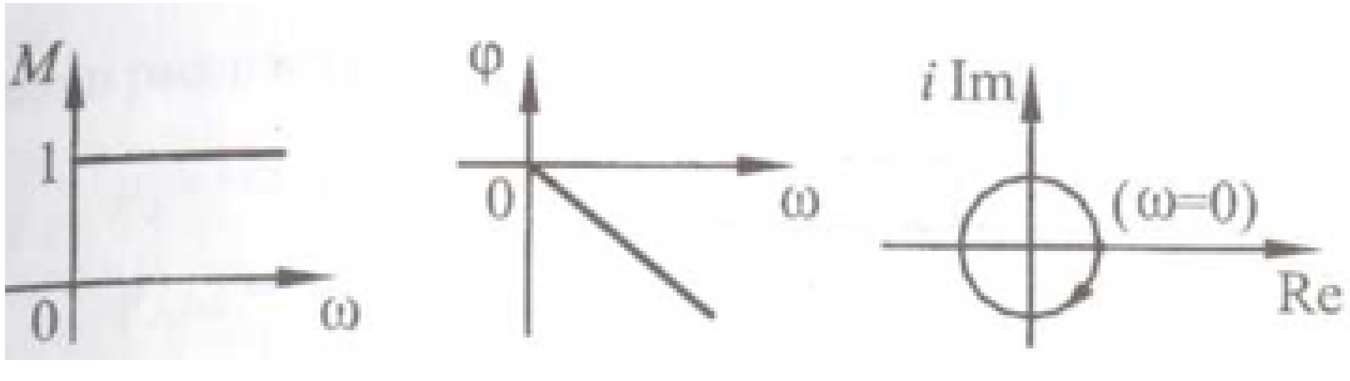
где τ – время чистого запаздывания.
Амплитудно-фазовая частотная характеристика:

$$W(i\omega) = e^{-i\omega\tau}, \qquad A(\omega) = 1, \qquad \varphi(\omega) = -\tau\omega[\text{рад}] = \frac{-180}{\pi}\tau\omega[\text{угл. град}].$$

Переходная и весовая функции: $h(t) = 1(t - \tau)$, $g(t) = \delta(t - \tau)$.
Разница между этим звеном и безынерционным, в величине фазы. Амплитудные характеристики одинаковы.
Примерами звеньев могут служить линия связи, трубопровод, транспортер, конвейер и др.

Графики частотных характеристик

Частотные характеристики звена запаздывания



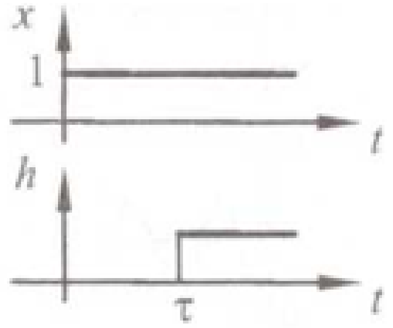
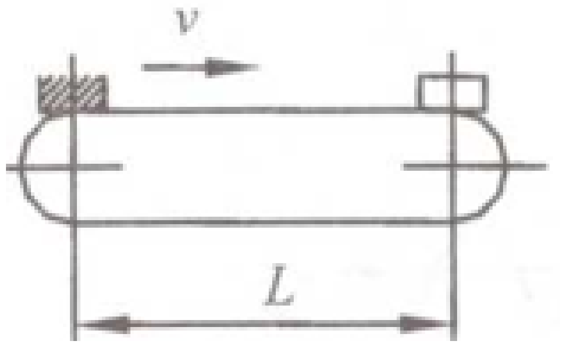


График кривой разгона

Моделью звена чистого (или транспортного) запаздывания может служить ленточный транспортер, если за входную координату принять изменение массы груза в начале транспортерной ленты, а за выходную – массу груза в конце транспортера.
Выходной сигнал будет повторять изменения входного сигнала с запаздыванием τ, равным времени движения груза от места погрузки до места выгрузки, т.е. $\tau = L/v$.



Звено с положительным полюсом

Передаточная функция звена имеет вид $W(s) = \frac{1}{Ts-1}$.

Здесь имеется положительный полюс (корень знаменателя) s_1=1/T. В полюсе передаточная функция стремится к бесконечности $(W(s) \to \infty)$.

Амплитудно-фазовая частотная характеристика:

$$W(i\omega) = \frac{1}{Ti\omega-1}, A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{T^2\omega^2+1}}, \varphi(\omega) = -\pi + \mathrm{arctg}T\varphi.$$

Разница между этим звеном и апериодическим первого порядка, в величине фазы. Амплитудные же характеристики одинаковы.

Звено с положительным нулем

Передаточная функция звена имеет вид $W(s) = (1 - \tau s)$.

Здесь имеется положительный нуль (корень числителя) $s_1 = 1/\tau$. В нуле передаточная функция равна нулю $(W(s) = 0)$.

Амплитудно-фазовая частотная характеристика:

$$W(i\omega) = (1 - i\omega\tau),$$

$$A(\omega)=\sqrt{1+\tau^2\omega^2}, \varphi(\omega) = -arctg(\omega\tau).$$

Разница между этим звеном и форсирующим первого порядка только в величине фазы. Амплитудные же характеристики одинаковы.

Типовые звенья и структурные схемы

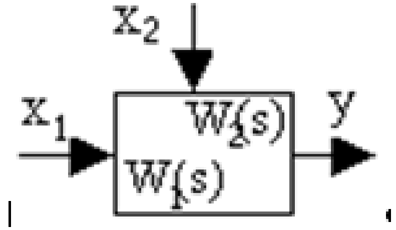
Звено в структурной схеме выступает как элементарная структурная единица, преобразователь информации.

Звено с одним входом и одним выходом:

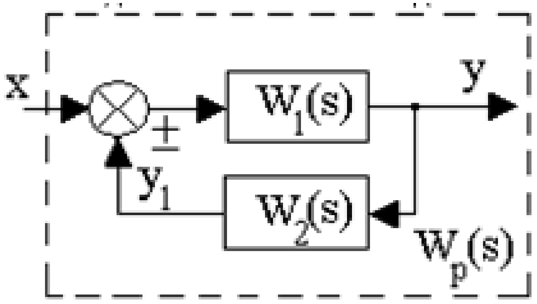
$$Y(s) = W(s)X(s).$$

Звено с двумя входами и одним выходом (около каждого входа записывается своя передаточная функция):

$$Y(s) = W_1(s)X_1(s)+W_2(s)X_2(s).$$



Обратная связь



См. схемы последовательного и параллельного соединения звеньев.