

Основы теории управления

д.т.н. Мокрова Наталия Владиславовна

пятница	ауд. 119
14:35 - 16:05	Лекция
16:20 - 17:50	Лабораторная работа

Лекция 5

Устойчивость систем управления

Замкнутые системы управления.

Понятие устойчивости систем.

Устойчивость линейных систем.

Алгебраические критерии устойчивости:

- Рауса;
- Гурвица.

Частотные критерии устойчивости:

- Михайлова;
- Найквиста.

Запасы устойчивости.

Замкнутые системы управления

Система автоматического управления представляет собой совокупность объекта управления, регулятора и датчика рассогласования.

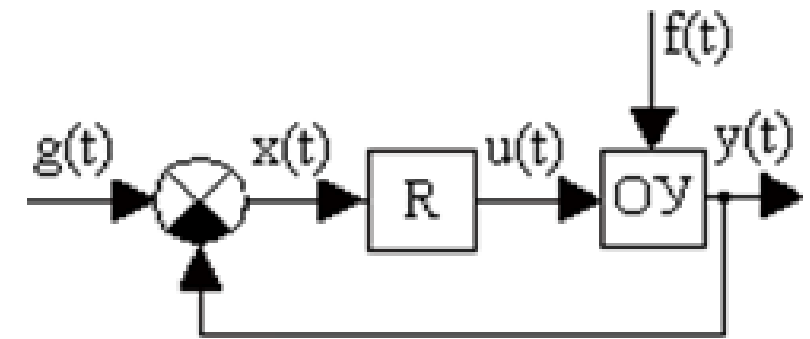
Математическое описание системы управления на основе линеаризованных уравнений всех элементов представляет собой систему ДУ, которая путем исключения промежуточных переменных может быть разрешена относительно любой координаты. Обычно либо относительно рассогласования $x(t)$, т.е. ошибки, либо относительно управляемой величины $y(t)$.

Для исследования изменения ошибки получаем ДУ:

$$D(p)x(t) = Q(p)g(t) + N(p)f(t).$$

Ошибка может быть представлена в виде суммы двух составляющих:

- первая составляющая определяется влиянием задающего воздействия,
- вторая – возмущающего воздействия.



Функциональная схема
системы управления

Дифференциальное уравнение системы

Характеристический полином $D(p)$ степени n от символа дифференцирования p характеризует свободное движение системы.

$$D(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n$$

где $a_0, \dots, a_n$ в линеаризованной системе постоянные коэффициенты.

Полином $Q(p)$ степени m ($m \leq n$) от символа дифференцирования p определяет влияние задающего воздействия $g(t)$ на характер изменения ошибки.

Полином $N(p)$ степени k ($k \leq n$) от p определяет влияние возмущающего воздействия $f(t)$ на характер изменения ошибки. Возмущений может быть несколько, которые суммируются (по принципу суперпозиции для линейного объекта).

При решении системы ДУ относительно управляемой величины получается уравнение движения объекта управления при наличии регулятора, которое получается в результате подстановки выражения для ошибки $x(t) = g(t) - y(t)$ в уравнение $D(p)y(t) = R(p)g(t) - N(p)f(t)$, где $R(p) = D(p) - Q(p)$.

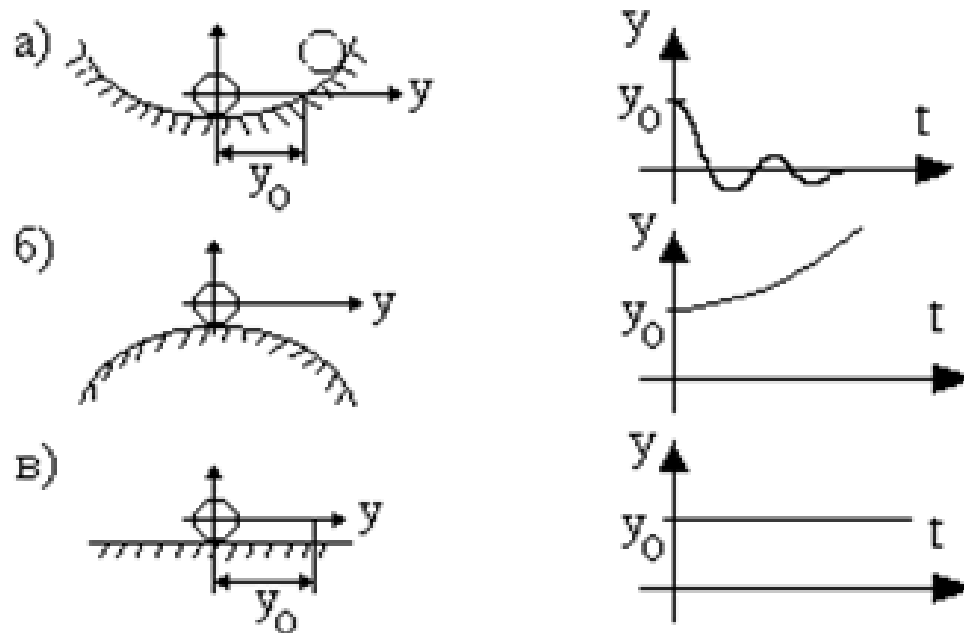
Полином $R(p)$ определяет влияние задающего воздействия $g(t)$ на управляемую величину.

Четверка полиномов $D(p)$, $Q(p)$, $N(p)$, $R(p)$ полностью определяет замкнутую систему управления.

Понятие устойчивости систем

Система д.б. работоспособной то есть нормально функционировать при действии на нее различных внешних возмущений или работать устойчиво.

Устойчивость – способность возвращаться в состояние равновесия после исчезновения внешних воздействий, которые вывели систему из этого состояния.



- а) $y(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, устойчивое положение шарика;
- б) $y(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$, неустойчивое положение;
- в) $y(t) = y_0 = \text{const}$ при $t \geq 0$, нейтральное или безразличное положение шарика.

Устойчивость характеризуется свободным поведением системы.

Общая теория устойчивости разработана А.М.Ляпуновым.

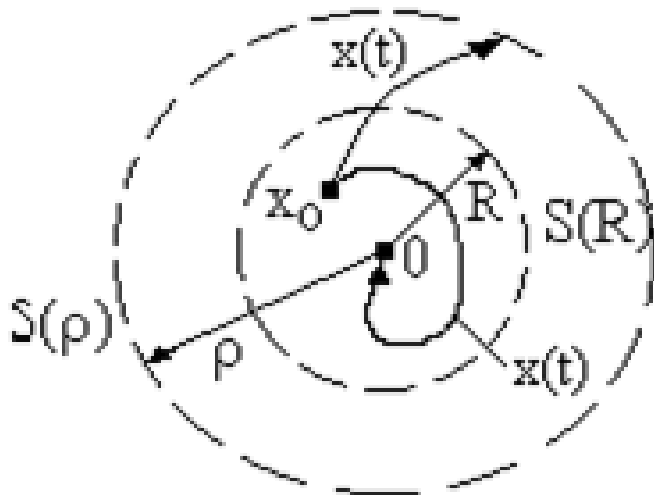
Иллюстрация понятия устойчивости

Понятие устойчивости

Система управления n -го порядка описывается ДУ в форме Коши:

$$\frac{dX}{dt} = F(X, t) \mid \text{ где } X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Состояние системы можно изобразить точкой в пространстве, координатами которого являются переменные системы $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Начало координат соответствует равновесному состоянию системы. решение уравнения можно рассматривать как некоторую траекторию $X(t)$ в пространстве переменных $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.



Траектории движения,
соответствующие устойчивой и
неустойчивой системам

Понятие устойчивости

Положение равновесия в начале координат может быть, по Ляпунову, устойчиво, асимптотически устойчиво и неустойчиво.

Положение устойчиво, если для любого $R < \rho$ существует такое $r \leq R$, что траектория $X(t)$, начинающаяся в точке x_0 сферической области $S(r)$, все время остается в сферической области $S(R)$. Или траектория $X(t)$, начинающаяся внутри области $S(r)$, никогда не достигает сферы $S(R)$.

Положение асимптотически устойчиво, если оно устойчиво и, сверх того, существует такое $R < \rho$, что траектория $X(t)$, начинающаяся в сферической области $S(R)$, стремится к началу координат при неограниченном росте времени.

Положение неустойчиво, если для некоторого (хотя бы одного) $R < \rho$ и любого r , каким бы малым r не выбиралось, всегда найдется внутри сферической области $S(r)$ такая точка x_0 , что траектория $X(t)$, начинающаяся в этой точке, достигает за конечное время сферы $S(R)$.

Чтобы решить вопрос об устойчивости системы, необходимо определить траекторию ее движения в пространстве состояний, то есть найти решение ДУ, которое описывает исследуемую систему.

Устойчивость линейных систем

Устойчивость линейной системы можно исследовать по характеру изменения только одной любой ее переменной.

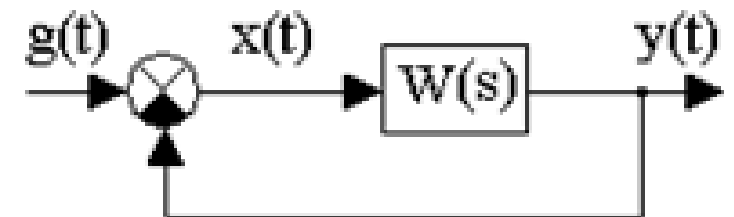
Линейная система называется устойчивой, если ее выходная координата остается ограниченной при любых ограниченных по абсолютной величине входных воздействиях.

Устойчивая линейная система должна переходить от одного установившегося состояния к другому при изменении задающего воздействия.

Устойчивость линейной системы определяется ее характеристиками и не зависит от действующих воздействий.

Для определения устойчивости линейной системы требуется найти изменение ее управляемой величины.

Структурная схема линейной системы с $W(s)$ – передаточной функцией разомкнутой системы.



Свободное движение и устойчивость

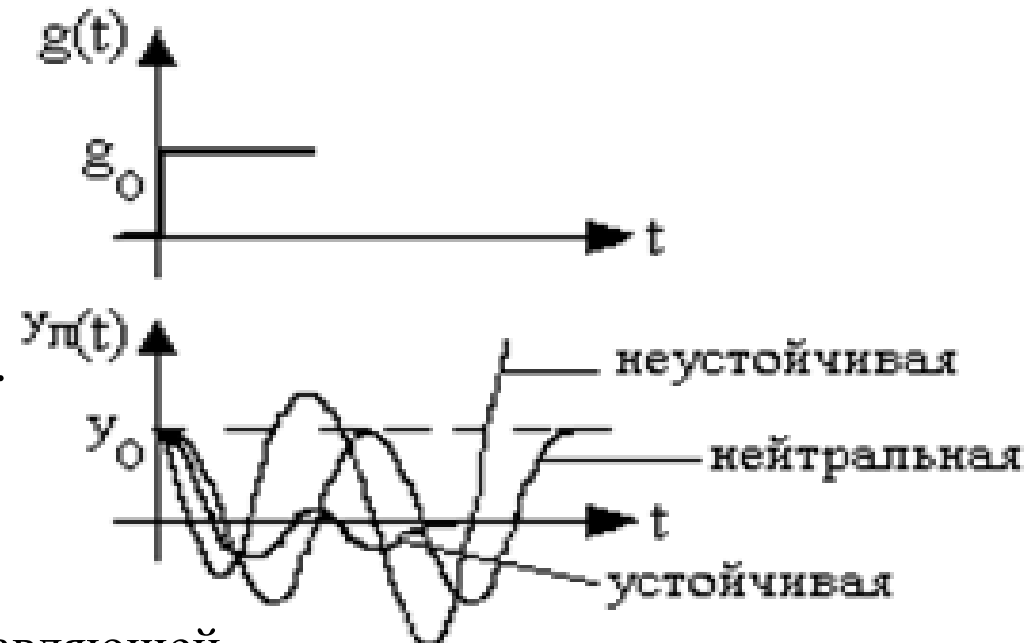
Процессы в системе описываются ДУ вида $D(p)y(t) = R(p)g(t)$.

Решение уравнения состоит из двух составляющих:

$y(t) = y_B(t) + y_n(t)$, где $y_B(t)$ – вынужденное решение; $y_n(t)$ – переходная составляющая.

Система устойчива, если переходная составляющая решения стремится к нулю при времени, стремящемся к бесконечности.

Если $y_n(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, то система устойчивая;
если $y_n(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$, то система неустойчивая;
если $y_n(t) = \text{const}$ при $t \rightarrow \infty$, то система нейтральная.



Возможные виды переходной составляющей

Корни характеристического уравнения

Переходная составляющая решения уравнения зависит от корней

характеристического уравнения, которое получается путем приравнивания

характеристического полинома к нулю: $D(p) = 0$, где

$$D(p) = 1 + W(s) \Big|_{s=p}$$

Переходная составляющая решения

$$y_n(t) = \sum_{i=1}^n c_i e^{p_i t}$$

где p_i — корни характеристического уравнения (полюсы системы);

c_i — постоянные интегрирования.

Действительному корню характеристического уравнения p_i соответствует

$$y_{\text{ин}}(t) = c_i e^{p_i t}.$$

Если $p_i < 0$, то переходная составляющая с ростом времени стремится к нулю, если $p_i > 0$, то

эта составляющая неограниченно возрастает.

Паре комплексно-сопряженных корней соответствует слагаемое

$$y_{\text{ин}}(t) = A_i e^{\alpha_i t} \sin(\beta_i t + \varphi_i),$$

где $\alpha_i \pm j\beta_i$ — корни характеристического уравнения;

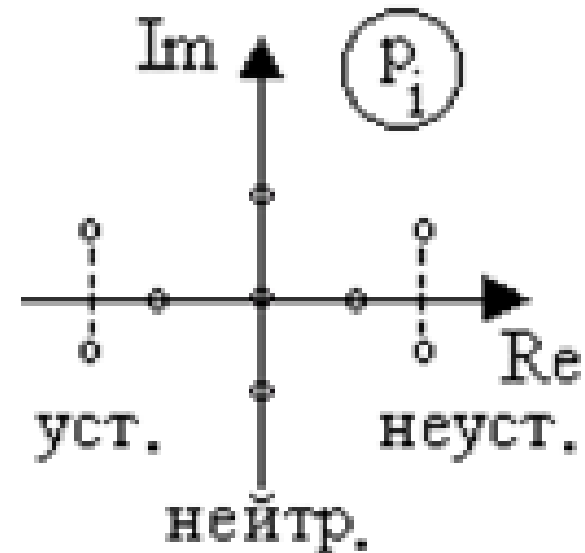
A_i, φ_i — постоянные интегрирования.

Условия устойчивости

Переходная составляющая с ростом времени стремится к нулю, если вещественные части корней отрицательны, в противном случае амплитуда колебаний переходной составляющей возрастает.

Пара мнимых корней характеристического уравнения позволяет получить переходную составляющую в виде колебаний с постоянной амплитудой: $y_{ni}(t) = A_i \sin(\beta_i t + \varphi_i)$.

Для устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения имели отрицательные вещественные части, или эти корни на плоскости комплексного переменного были расположены слева от мнимой оси.



Условия устойчивости

Если корни характеристического уравнения расположены на мнимой оси, то система находится **на границе устойчивости**. Варианты:

- корень в начале координат (свободный член характеристического уравнения равен нулю, имеем **апериодическую** границу устойчивости. Если остальные корни имеют отрицательные вещественные части, то система устойчива не относительно выходного сигнала, а относительно его производной, выходной сигнал в установившемся режиме произвольный. А система **нейтрально** устойчива);
- пара мнимых корней (**колебательная** – граница устойчивости).

Если хотя бы один из корней лежит в правой полуплоскости комплексной плоскости корней характеристического уравнения, то система **неустойчивая**.

Вычисление корней характеристического уравнения высокого порядка затруднительно. Для исследования устойчивости систем разработаны критерии, позволяющие судить о расположении корней на комплексной плоскости без их расчета. Перед оценкой устойчивости тем или иным критерием, следует проверить выполнение необходимого условия устойчивости.

Необходимым, но недостаточным условием устойчивости системы является положительность (отрицательность) всех коэффициентов характеристического уравнения системы

т.е. соблюдение условия $a_i > 0$

для всех i от 0 до n , где n – порядок системы.

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0$$

Критерий Рауса

Алгебраические критерии позволяют по коэффициентам характеристического уравнения судить об устойчивости систем.

Линейная система, характеристический полином которой равен

$$D(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n$$

где $a_0 > 0$, устойчива, если положительны все элементы первого столбца матрицы:

a_0	a_2	a_4	a_6	...
a_1	a_3	a_5	a_7	...
c_{31}	c_{32}	c_{33}	c_{34}	...
c_{41}	c_{42}	c_{43}	c_{44}	...
c_{51}	c_{52}	c_{53}	c_{54}	...
...	...	...	...	...

В первой строке таблицы Рауса расположены четные коэффициенты характеристического полинома, во второй – нечетные. Если степень характеристического полинома – четное число, то последний элемент второй строки равен нулю. Третья и последующие строки определяются следующим образом:

$$c_{ij} = c_{i-1,1} \times c_{i-2,j+1} - c_{i-2,1} \times c_{i-1,j+1}; \quad c_{i,L} = 0;$$
$$i = 3, 4, \dots, n+1; \quad j = 1, 2, \dots, L-1; \quad L = [0.5 \times n] + 1.$$

[] – целая часть числа.

Критерий Гурвица

Линейная система устойчива, если положительны n главных определителей матрицы:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & a_n \end{bmatrix}$$

Порядок составления матрицы Гурвица:

- на главной диагонали записываются все коэффициенты, начиная с первого;
- заполняются строки: четными коэффициентами по порядку, если на главной диагонали стоит четный коэффициент, и нечетными, если на главной диагонали стоит нечетный коэффициент;
- если какой-либо коэффициент отсутствует, то вместо него заносится нуль.

Для оценки устойчивости системы необходимо вычислить определители Гурвица Δ_i ($i = 1, 2, \dots, n$), которые получают из матрицы путем отчеркивания равного числа строк и столбцов в левом верхнем углу матрицы.

Система устойчива, если $\Delta_i > 0$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$.

Последний определитель Гурвица, как видно из приведенной выше матрицы, равен $\Delta_n = a_n \times \Delta_{n-1}$.

Поэтому его положительность сводится при $\Delta_{n-1} > 0$ к условию $a_n > 0$,

Для систем первого и второго порядка критерий Гурвица сводится просто к положительности коэффициентов a_i .

Пример

Характеристическое уравнение замкнутой системы $D(p)=0$, где

$$D(p)=1+W(s)\Big|_{s=p}.$$

Откуда следует $p(T_1 p+1)(T_2 p+1)+k=0$

Раскрыв скобки, получим $T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2)p^2 + p + k = 0$.

Тогда имеем: $a_0 = T_1 T_2$; $a_1 = (T_1 + T_2)$; $a_2 = 1$; $a_3 = k$.

Коэффициенты характеристического уравнения положительны.

Составим матрицу Гурвица

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{bmatrix}$$

и найдем определители этой матрицы.

Для устойчивости системы все они должны быть положительными:

$$\Delta_1 = a_1, \text{ откуда } (T_1 + T_2) > 0;$$

$$\Delta_2 = a_1 \times a_2 - a_0 \times a_3, \text{ откуда } (T_1 + T_2) - k T_1 T_2 > 0;$$

$$\Delta_3 = a_1 \times a_2 \times a_3 - a_0 \times a_3^2 = a_3 (a_1 \times a_2 - a_0 \times a_3), \text{ откуда } a_3 > 0, \text{ то есть } k > 0.$$

Если $\Delta_n = 0$, то система находится на границе устойчивости. Возможны два случая: апериодическая граница устойчивости, если свободный член характеристического уравнения равен нулю, что соответствует нейтрально устойчивой системе; колебательная граница устойчивости, если определитель $\Delta_{n-1} = 0$. Из условия $\Delta_{n-1} = 0$ можно определить параметры, при которых система находится на границе устойчивости.

Графическое представление устойчивости

Условие устойчивости по критерию Гурвица $(T_1 + T_2) > kT_1T_2$ или $k < (1/T_1 + 1/T_2)$

Границы устойчивости:

1) $a_n = 0, k = 0$;

2) $\Delta_{n-1} = 0, k_{\text{гр}} = (1/T_1 + 1/T_2)$;

3) $a_0 = 0, T_1T_2 = 0$.

Границы устойчивости изображают графически в пространстве параметров k, T_1, T_2 .

k – общий коэффициент передачи разомкнутой системы.

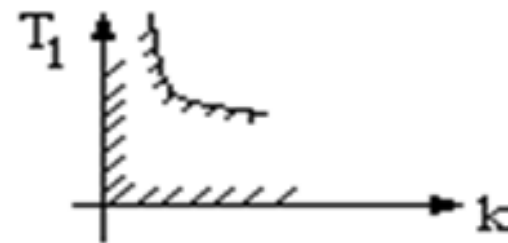
Пространство параметров прямая линия, а границы устойчивости – точки на ней: $k = 0$ и $k = k_{\text{гр}}$, между которыми – область устойчивости.

При увеличении T_1 и T_2 обл. устойчивости сужается.

При любых T_1 и T_2 существует граничное значение $k_{\text{гр}}$, после чего система становится неустойчивой.



Область устойчивости по одному параметру



Область устойчивости по двум параметрам

Границами устойчивости в пространстве трех параметров k, T_1, T_2 будут три координатные плоскости и криволинейная поверхность, сечениями которой как в вертикальных так и в горизонтальных плоскостях будут гиперболы.

Пример

$$3y^{(4)}(t) + 4y^{(3)}(t) + 4y''(t) + 2y'(t) + y(t) = f(t).$$

Обозначим коэффициенты уравнения:

$$a_0 = 3; a_1 = 4; a_2 = 4; a_3 = 2; a_4 = 1.$$

Составим определители Гурвица: $\Delta_4 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow$

$$\Delta_1 = 4 > 0; \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 = 10 > 0;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 2\Delta_2 - 4 \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4 > 0; \Delta_4 = 1\Delta_3 = 4 > 0.$$

Поскольку все определители Гурвица положительны, система устойчива.

Частотные критерии устойчивости

Частотные критерии устойчивости базируются на принципе аргумента.

Выражение для характеристического вектора из характеристического полинома системы, предварительно разложенного на множители, путем замены p на $j\omega$:

$$D(j\omega) = a_n(j\omega - p_1)(j\omega - p_2)\dots(j\omega - p_n),$$

где p_i – корни характеристического уравнения (полюсы системы).

Определим изменение аргумента вектора $D(j\omega)$

при изменении частоты ω от $-\infty$ до $+\infty$

$$\Delta \arg D(j\omega) = \sum_{i=1}^n \arg(j\omega - p_i) \text{ при } -\infty \leq \omega \leq +\infty.$$

Если корень характеристического уравнения p_i расположен на комплексной плоскости слева от мнимой оси, то вектор $(j\omega - p_i)$ поворачивается на угол π , если этот корень находится на комплексной плоскости справа от мнимой оси, то вектор $(j\omega - p_i)$ поворачивается на угол $-\pi$. Допустим, что m корней характеристического уравнения расположены справа от мнимой оси, а остальные $n - m$ корней – слева. Тогда изменение аргумента характеристического вектора равно $\Delta \arg D(j\omega) = (n - m)\pi$ при $-\infty \leq \omega \leq +\infty$.

В устойчивой системе $m=0$, и изменение аргумента характеристического вектора получается следующим: $\Delta \arg D(j\omega) = n \pi / 2$ при $0 \leq \omega \leq +\infty$.

Критерий устойчивости Михайлова

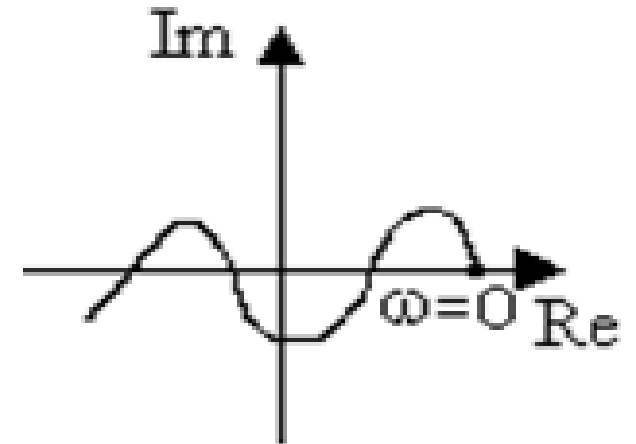
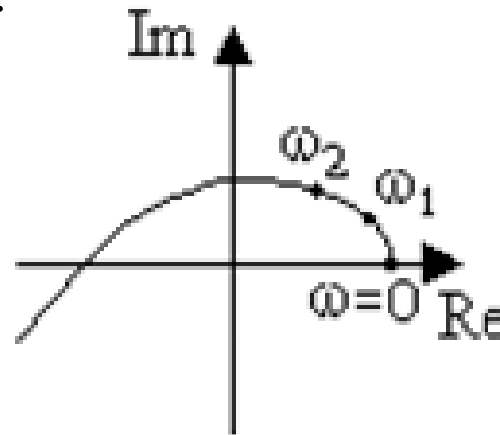
Изменение аргумента характеристического вектора определяется по годографу вектора, записанному в виде $D(j\omega) = X(\omega) + jY(\omega) = D(\omega)e^{j\psi(\omega)}$, где $X(\omega)$ и $Y(\omega)$ действительная и мнимая части характеристического вектора, а $D(\omega)$ и $\psi(\omega)$ его модуль и аргумент.

Формулировка критерия.

Для устойчивости линейной системы n -го порядка необходимо и достаточно, чтобы изменение аргумента функции $D(j\omega)$ при изменении ω от 0 до ∞ равнялось бы n .

Система устойчива, если годограф характеристического вектора (кривая Михайлова), начинаясь на положительной части действительной оси, обходит последовательно в положительном направлении (против часовой стрелки) n квадрантов, где n – порядок характеристического уравнения системы.

Примеры годографов
для устойчивой и неустойчивой систем



Пример

Исследуем на устойчивость систему с характеристическим полиномом:

$$D(p) = T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2)p^2 + p + k.$$

Найдем годограф характеристического вектора $D(j\omega) = T_1 T_2 (j\omega)^3 + (T_1 + T_2)(j\omega)^2 + j\omega + k.$

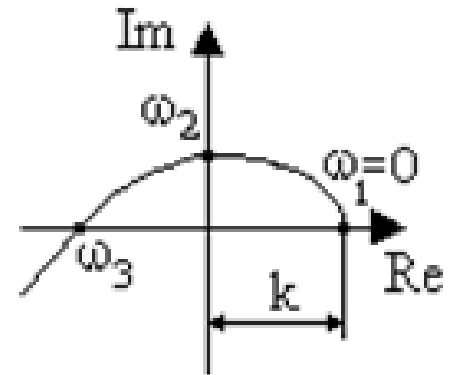
Откуда $\operatorname{Re} D(j\omega) = X(\omega) = k - (T_1 + T_2)\omega^2;$ $\operatorname{Im} D(j\omega) = Y(\omega) = \omega - T_1 T_2 \omega^3.$

Для того, чтобы система 3-го порядка была устойчива, кривая Михайлова должна последовательно проходить три квадранта.

Найдем условие устойчивости из требования чередования корней $0 = \omega_1 < \omega_2 < \omega_3.$

Корень ω_2 находится из уравнения $X(\omega) = 0$, откуда $\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{T_1 + T_2}}$
Отсюда **первое условие** устойчивости: $k > 0.$

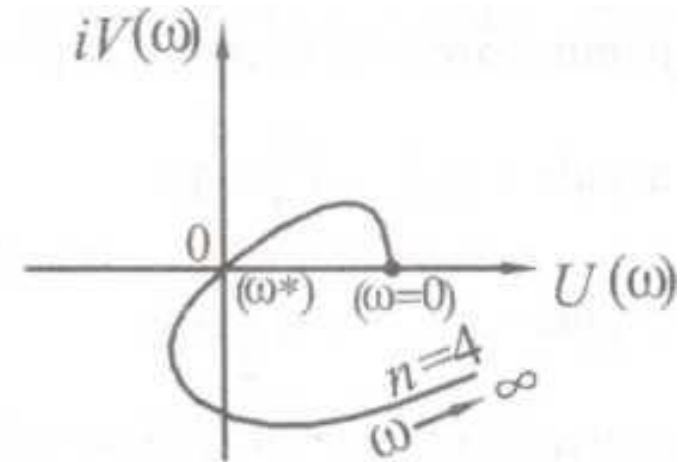
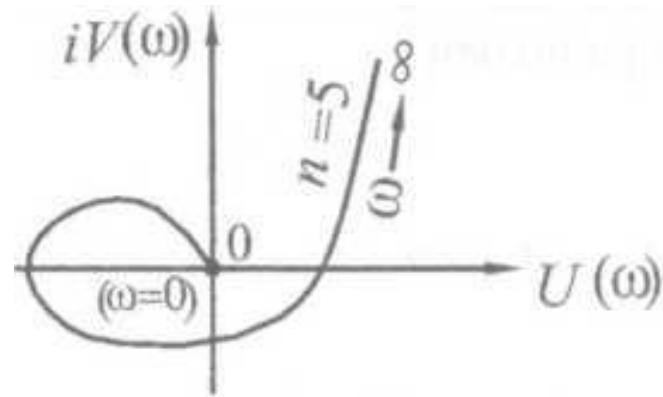
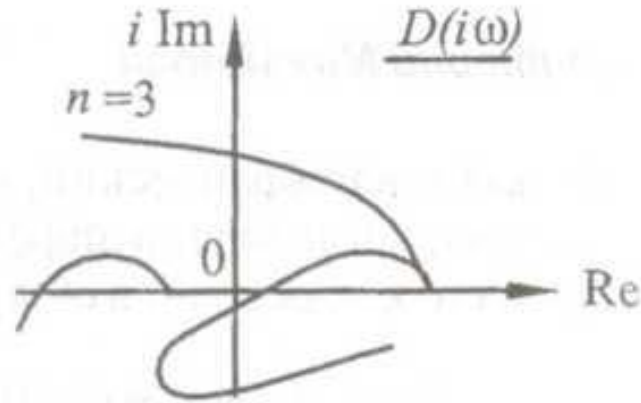
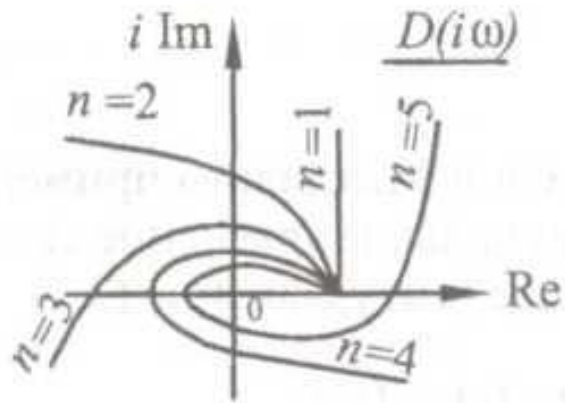
Корень ω_3 находится из уравнения $Y(\omega) = 0$, откуда $\omega_3 = \sqrt{\frac{1}{T_1 T_2}}$



Подставляя эти значения в требуемое условие $\omega_2 < \omega_3$, получаем **второе условие** устойчивости системы $k < (1/T_1 + 1/T_2)$, которое совпадает с условием устойчивости по критерию Гурвица.

Графическая интерпретация

Примеры годографов вектора Михайлова
для устойчивых и неустойчивых систем



Годографы вектора Михайлова
для систем на границе устойчивости

Критерий перемежаемости

Достаточно определение корней действительной и мнимой частей годографа вектора Михайлова.

При последовательном прохождении n квадрантов годограф вектора Михайлова поочередно $(n - 1)$ раз пересекает оси координат, т.е. последовательно обращаются в нуль мнимая и действительная части $D(i\omega)$.

На этом основано следствие из критерия Михайлова – *критерий перемежаемости*: для того, чтобы система была устойчива, необходимо, чтобы корни действительной и мнимой частей вектора Михайлова перемежались друг с другом.

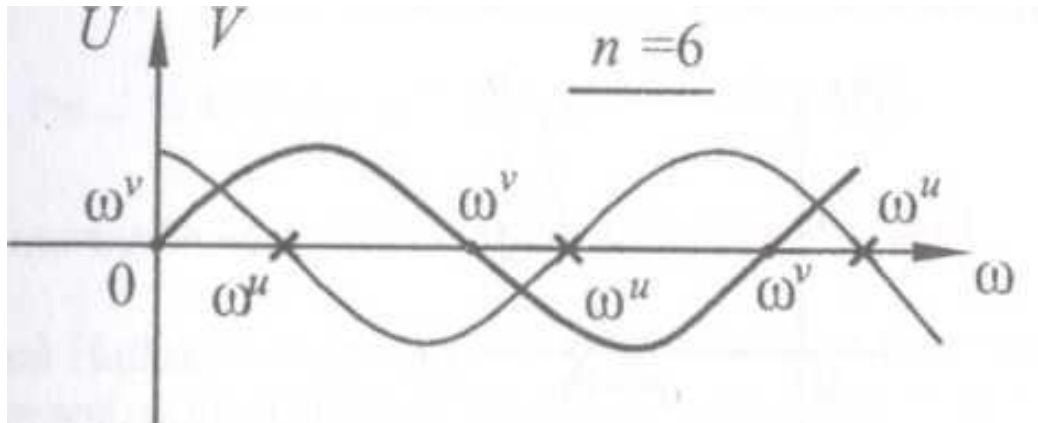


Иллюстрация критерия перемежаемости

Пример

$$y^{(5)}(t) + y^{(4)}(t) + y^{(3)}(t) + y''(t) + y'(t) + y(t) = f(t).$$

Характеристическое уравнение:

$$D(p) = p^5 + p^4 + p^3 + p^2 + p + 1 = 0.$$

Вектор Михайлова (подстановка $p = i\omega$).

$$D(i\omega) = (i\omega)^5 + (i\omega)^4 + (i\omega)^3 + (i\omega)^2 + (i\omega) + 1 = U(\omega) + iV(\omega), \text{ где } U(\omega) = \omega^4 - \omega^2 + 1; V(\omega) = \omega(\omega^4 - \omega^2 + 1).$$

Перед построением всего годографа $D(i\omega)$ определим точки его пересечения с действительной и мнимой осями, т.е. найдем действительные положительные корни полиномов $U(\omega)$ и $V(\omega)$.

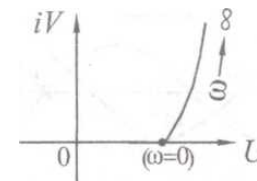
$$U(\omega) = 0; \omega^4 - \omega^2 + 1 = 0.$$

Уравнение не имеет действительного решения, годограф $D(i\omega)$ ни разу не пересекает мнимую ось. Далее расчеты можно не проводить, так как система неустойчива.

По критерию Михайлова годограф $D(i\omega)$ устойчивой системы 5-го порядка при изменении от 0 до ∞ должен пройти пять квадрантов, начиная с первого, т.е. должен пересечь мнимую ось два раза.

Полный анализ $D(i\omega)$ примера показывает,

что его годограф целиком лежит в первом квадранте.



Критерий устойчивости Найквиста

На практике широко используют частотный критерий Найквиста, который позволяет судить об устойчивости системы по частотным характеристикам разомкнутой системы.

Допустим разомкнутая система устойчива и не содержит интегрирующих звеньев.

Введем вектор $F(j\omega) = 1 + W(j\omega) = \frac{L(j\omega) + N(j\omega)}{L(j\omega)}$,

где $W(j\omega) = \frac{N(j\omega)}{L(j\omega)}$ — частотная передаточная функция разомкнутой системы.

Числитель — характеристический вектор замкнутой системы, знаменатель — характеристический вектор разомкнутой системы.

Определим изменение аргумента вектора $F(j\omega)$ при изменении частоты ω от 0 до $+\infty$ для случая, когда замкнутая система устойчива:

$$\Delta \arg F(j\omega) = \Delta \arg [L(j\omega) + N(j\omega)] - \Delta \arg L(j\omega) = 0 \quad \text{при } 0 \leq \omega \leq +\infty.$$

Устойчивость по Найквисту

Если разомкнутая и замкнутая системы устойчивы, то изменение аргумента вектора $F(j\omega)$ равно нулю, следовательно, его годограф не охватывает начала координат. В противном случае, когда годограф $F(j\omega)$ охватывает начало координат, изменение его аргумента не равно нулю и система в замкнутом состоянии неустойчива. Об изменении аргумента вектора $F(j\omega)$ удобнее судить по годографу частотной характеристики разомкнутой системы, т.е. по ее амплитудно-фазовой частотной характеристике. Действительно, изменение аргумента вектора $F(j\omega)$ будет равно нулю, если АФЧХ разомкнутой системы не охватывает точку с координатами $(-1, j0)$.

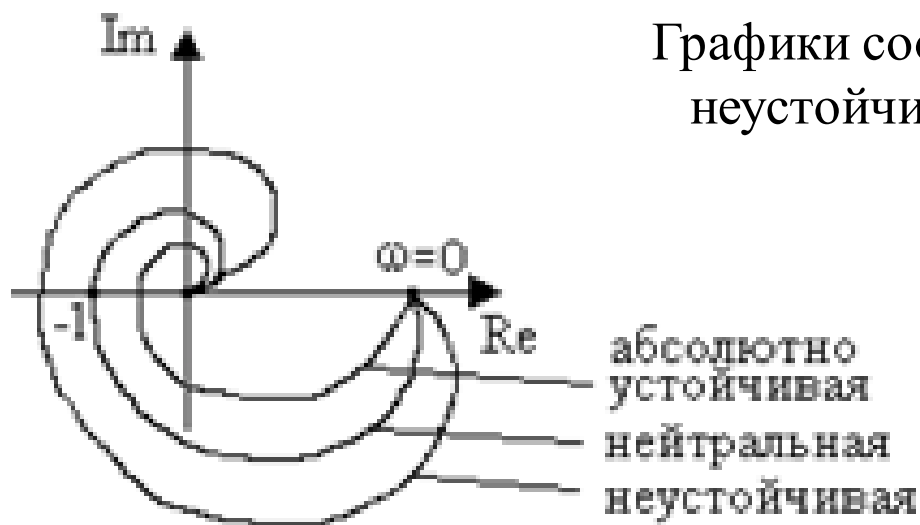
Если система содержит r интегрирующих звеньев, число r которых определяет степень астатизма системы, то начальное значение фазовой частотной характеристики равно $-r$, а амплитудной частотной — бесконечности, система в разомкнутом состоянии нейтральна. В таких астатических системах для удобства оценки устойчивости АФЧХ разомкнутой системы дополняют дугой бесконечного радиуса, начинающейся на положительной вещественной полуоси комплексной плоскости. Формулировка критерия устойчивости при этом не изменяется.

Если АФЧХ разомкнутой системы проходит через точку с координатами $(-1, j0)$, то система в замкнутом состоянии находится на границе устойчивости.

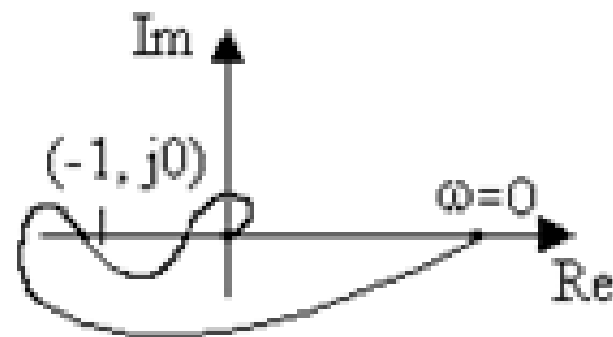
Аналогично доказывается критерий Найквиста неустойчивой разомкнутой системы.

Формулировка критерия

1. Если разомкнутая система устойчива, то для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы амплитудно-фазовая частотная характеристика разомкнутой системы не охватывала точку с координатами $(-1, j0)$.
2. Если разомкнутая система неустойчива, то для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы амплитудно-фазовая частотная характеристика разомкнутой системы охватывала точку с координатами $(-1, j0)$ и при изменении частоты от 0 до ∞ оборачивалась вокруг нее против часовой стрелки m раз, где m – число полюсов разомкнутой системы с положительной вещественной частью.



Графики соответствуют абсолютно устойчивой, нейтральной и неустойчивой системам.



АФЧХ статических разомкнутых систем

Условия устойчивости

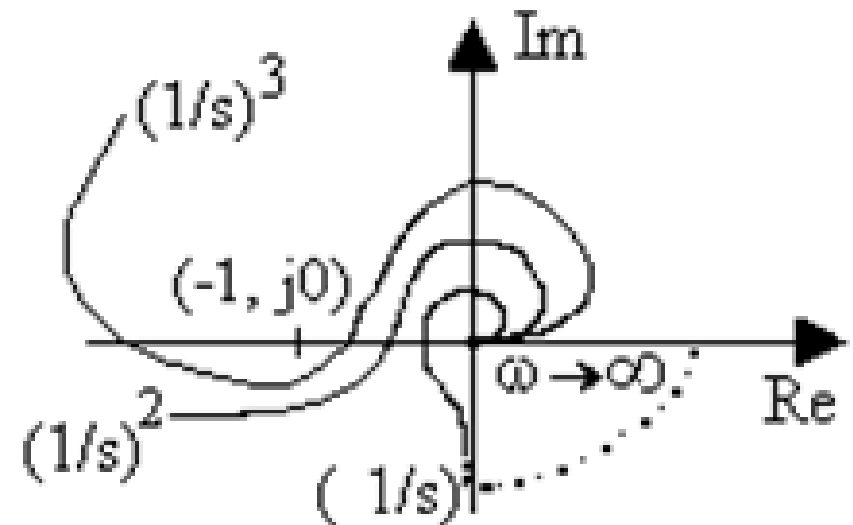
Система, АФЧХ разомкнутой цепи которой пересекает вещественную ось только справа от точки с координатами $(-1, j0)$, называется абсолютно устойчивой. В таких системах неустойчивость может наступить только при увеличении общего коэффициента передачи разомкнутой цепи.

Если АФЧХ разомкнутой системы пересекает вещественную ось и слева от точки с координатами $(-1, j0)$, но при этом число положительных (сверху вниз) переходов характеристики через ось абсцисс левее точки (-1) равняется числу отрицательных переходов (снизу вверх), то систему называют условно устойчивой. Неустойчивой такая система может быть как при увеличении, так и при уменьшении общего коэффициента передачи разомкнутой цепи.

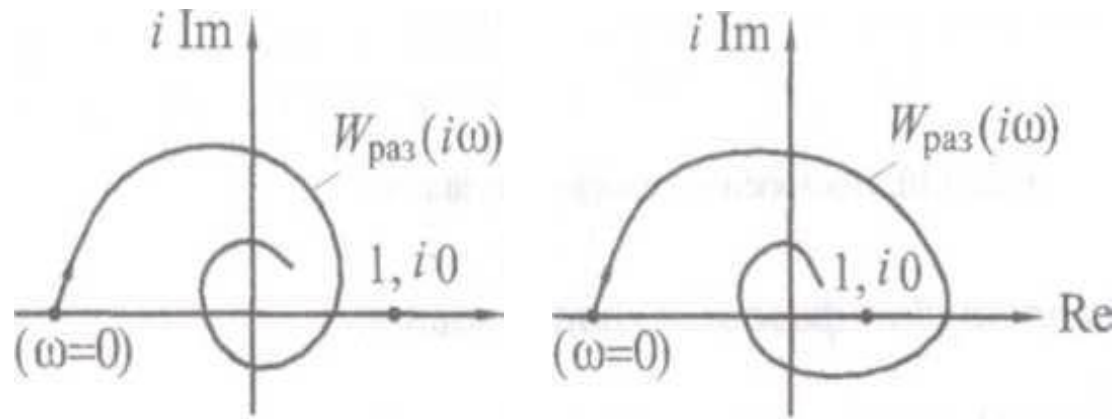
Если передаточная функция разомкнутой системы содержит в своем составе интегрирующие звенья, то АФЧХ начинается в бесконечности.

Графики соответствуют устойчивым системам с первой, второй и третьей степенями астатизма

АФЧХ астатических разомкнутых систем

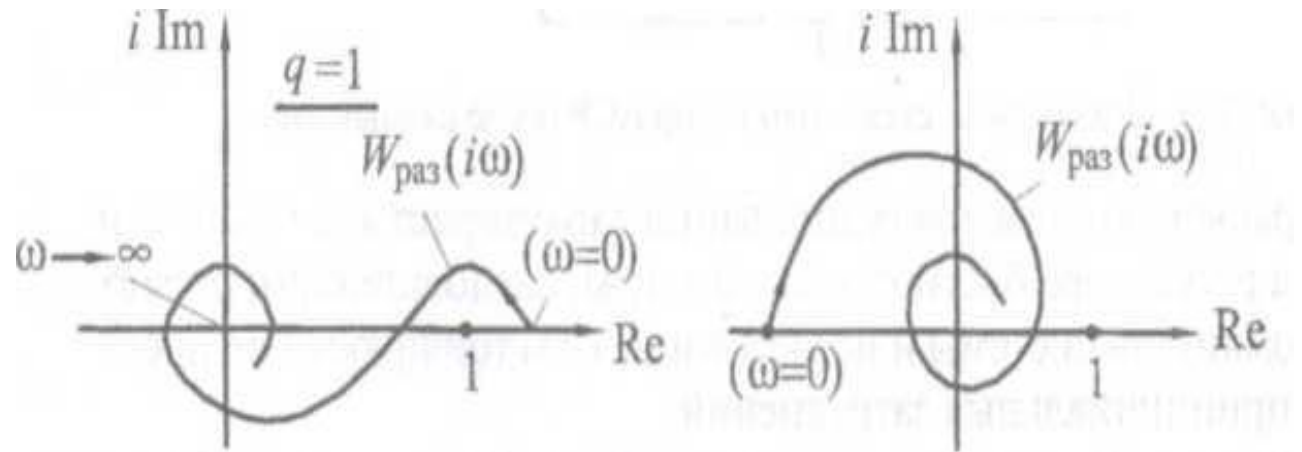


Графическая интерпретация



Примеры годографов АФХ устойчивых разомкнутых систем, при которых замкнутая система будет устойчивой (а) или неустойчивой (б)

Примеры годографов АФХ неустойчивых разомкнутых систем, при которых замкнутая система будет устойчивой(о) или неустойчивой(б)



Запасы устойчивости

В процессе работы системы ее параметры (коэффициенты передачи и постоянные времени) из-за изменений внешних условий, колебаний напряжений источников энергии и других причин отличаются от расчетных значений. Если не принять определенных мер, то система может стать неустойчивой. Для исключения этого явления при проектировании следует обеспечить определенные запасы устойчивости системы, которые характеризуют близость амплитудно-фазовой частотной характеристики разомкнутой системы к точке с координатами $(-1, j0)$.

Запасы устойчивости определяют на двух частотах: частоте среза ω_c и критической частоте $\omega_{кр}$. На частоте среза АЧХ разомкнутой системы равна единице, на критической частоте ФЧХ принимает значение, равное $-\pi$.

Различают запас устойчивости по амплитуде (модулю) и запас устойчивости по фазе.

Запас устойчивости по амплитуде задается некоторой величиной h , на которую должен отличаться модуль АФЧХ разомкнутой системы от единицы на частоте, при которой фаза равняется -180° , т.е.

$$h = \left| 1 - A(\omega) \right|_{\psi(\omega) = -180^\circ}$$



Запас устойчивости

Запас устойчивости по фазе задается некоторым углом μ , на который должна отличаться фаза АФЧХ разомкнутой системы от -180° на частоте, при которой модуль равняется единице, т.е.

$$\mu = \left| -180^\circ - \psi(\omega) \right|_{A(\omega)=1}$$

В хорошо демпфированных системах запас устойчивости по амплитуде составляет примерно $6 \div 20$ дБ, что составляет $2 \div 10$ в линейном масштабе, а запас по фазе – $30 \div 60^\circ$.

Чтобы спроектировать систему с заданными запасами устойчивости по модулю h_z и фазе μ_z , строят запретную область вокруг точки с координатами $(-1, j0)$, в которую не должна заходить АФЧХ разомкнутой системы.

Запретная область для АФЧХ
разомкнутой системы

