Основы теории управления

д.т.н. Мокрова Наталия Владиславовна

пятница	ауд. 119
14:35 - 16:05	Лекция
16:20 - 17:50	Лабораторная работа

Лекция 7
Нелинейные системы автоматического регулирования

Особенности нелинейных систем.
Типовые нелинейности систем автоматического регулирования.
Метод гармонической линеаризации.
Метод фазовой плоскости.
Фазовые портреты линейных систем.
Особенности фазовых портретов нелинейных систем.
Методы построения фазовых портретов нелинейных систем.
Устойчивость нелинейных систем.
Автоколебания в нелинейных системах.

Особенности нелинейных систем

Нелинейными называются системы, которые не подчиняются принципу суперпозиции.

Система будет нелинейной, если она содержит хотя бы одно звено, для которого не выполняется принцип суперпозиции.

Различают два типа нелинейностей: слабые и существенные. К слабо нелинейным объектам относят объекты, характеристики которых при малом диапазоне изменения координат могут быть заменены линейными зависимостями. К существенно нелинейным относят объекты, характеристики которых описываются существенно нелинейными функциями, т.е. функциями, не допускающими линеаризацию по методу малых отклонений (например, ломаные или разрывные функции).

Характер возможных движений в нелинейной системе разнообразнее, чем в линейной.

Особые свойства нелинейных систем нашли применение в технике. Нелинейные регуляторы более эффективны для управления (регуляторы с переменной структурой – закон регулирования изменяется в зависимости от величины отклонения регулируемой координаты и ее производных).

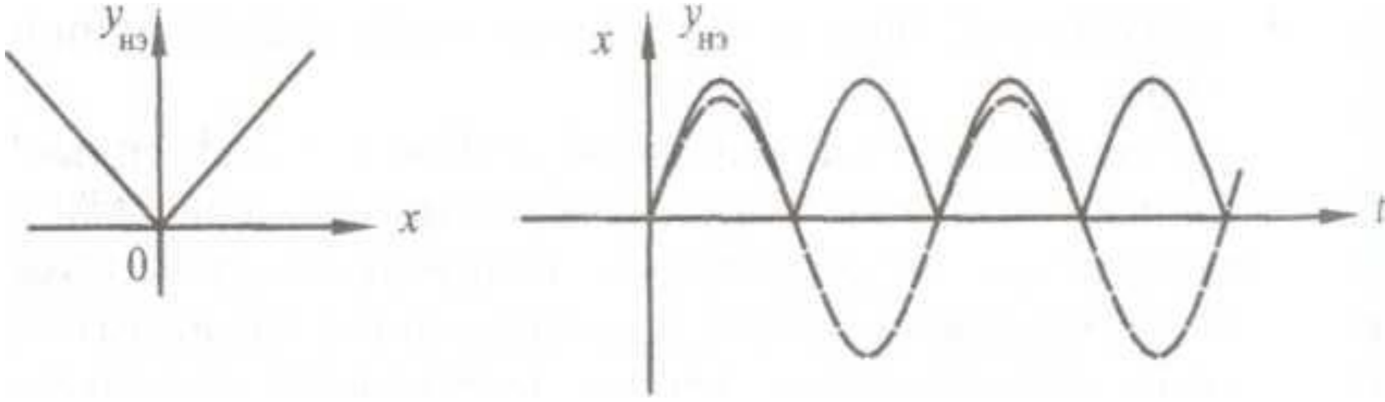
На нелинейных свойствах основано выпрямление переменного тока, генерирование электромагнитных колебаний, ведение технологического процесса в колебательном режиме, когда в силу нелинейности характеристик производительность аппарата оказывается выше чем при стационарном управлении.

Характерные особенности нелинейных систем

Реакция на гармонический сигнал.

При подаче на вход линейной системы гармонического сигнала на выходе устанавливаются гармонические колебания той же частоты, что и входной сигнал. В нелинейных системах вынужденные колебания могут отличаться от входного гармонического сигнала как по форме, так и по частоте.

Для нелинейного элемента со статической характеристикой $y_{нэ} = | x |$ вынужденные колебания не являются гармоническими и их частота вдвое больше, чем частота входных колебаний.



Пример вынужденных колебаний нелинейного элемента

Нелинейность характеристик может приводить к вредным последствиям. При этом приходится либо искать пути устранения нелинейностей, либо так выбирать режим функционирования системы, чтобы нелинейности меньше сказывались на результатах работы.

Характерные особенности нелинейных систем

Свойства частотных характеристик.

Частотные характеристика линейных систем не зависят от амплитуды входного сигнала и полностью определяются свойствами системы.

Частотные характеристики нелинейных систем существенно зависят от амплитуды входного сигнала.

Для некоторых нелинейностей
при малых амплитудах A входного сигнала ($A < a$)
система ведет себя как линейная,
а при больших амплитудах ($A > a$)
выходные колебания искажаются.

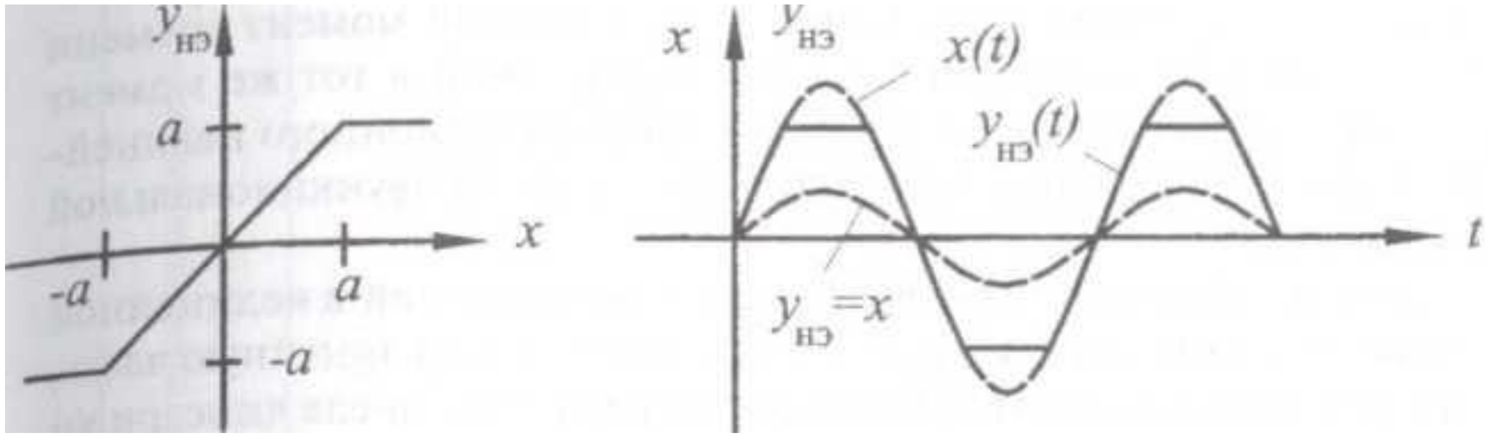


Иллюстрация зависимости частотных характеристик нелинейного элемента от амплитуды входного сигнала

Характерные особенности нелинейных систем

Понятие устойчивости.

Если линейная система устойчива (или неустойчива), то она устойчива (или неустойчива) при любых начальных условиях. Поэтому в каждой линейной системе возможен только один тип движения: в устойчивой системе – асимптотическое приближение к состоянию равновесия.

Нелинейная система может быть:

- устойчивой «в малом» – при малых начальных отклонениях система ведет себя как устойчивая, а при значительных отклонениях – как неустойчивая;
- или устойчивой «в большом».

В нелинейных системах устойчивость состояния равновесия зависит от начальных условий, поэтому возможны различные типы движения в зависимости от начальных условий.

Периодические (незатухающие) колебания.

Незатухающие колебания при свободном движении линейной системы возможны только если система находится на границе устойчивости, причем амплитуда колебаний определяется начальными условиями.

В нелинейных системах возможны незатухающие колебания, амплитуда и частота которых не зависят от начальных условий и определяются свойствами системы – автоколебания (часы пли электрический звонок). Автоколебания наблюдаются при определенных условиях в системах автоматического регулирования, содержащих нелинейные элементы.

Типовые нелинейности систем автоматического регулирования

При анализе нелинейных элементов систем автоматического реагирования обычно различают динамические и статические нелинейности.

Динамические нелинейности описываются нелинейными ДУ.

Статические нелинейности – безынерционные нелинейности. Выходная переменная звена, обладающего статической нелинейностью, в каждый момент времени зависит лишь от значения входной переменной в тот же момент времени, т.о. вход и выход безынерционного нелинейного элемента связаны между собой нелинейной функциональной зависимостью.

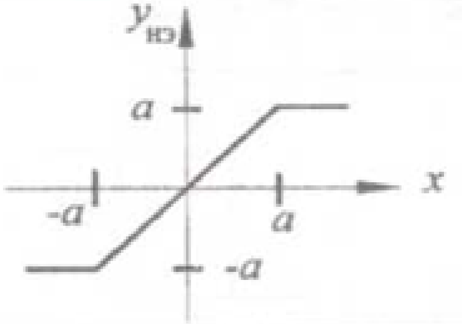
При составлении дифференциальных уравнений в нелинейной системе выделяют две части:

- приведенную линейную часть, к которой относят все линейные элементы (в том числе линеаризованные «слабые» нелинейности);
- существенно нелинейную часть.

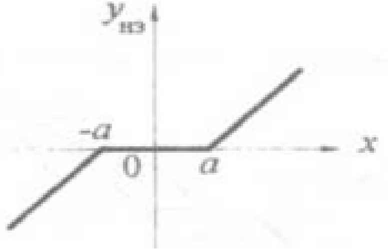
Во многих случаях нелинейные свойства АСР связаны с наличием статических нелинейностей.

Типовые нелинейные звенья

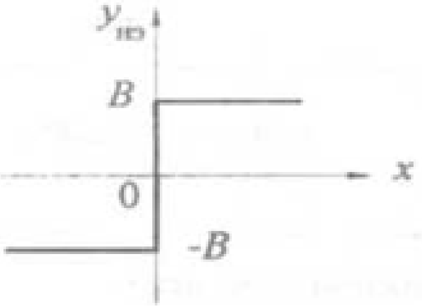
Усилительное звено с ограничением входного сигнала (звено с насыщением) является характерной нелинейностью практически для любой системы регулирования, так как ее элементы всегда работают в условиях ограничений по мощности, по перемещениям и т.п. (например, для регулирующего клапана).



Усилительное звено с зоной нечувствительности отражает наличие в любом элементе АСР большего или меньшего предела чувствительности.



Двухпозиционное реле используют в позиционных системах регулирования, в системах сигнализации, а также в специальных устройствах, применяемых для форсирования управляющего сигнала в случае большого рассогласования между переменной и заданием.



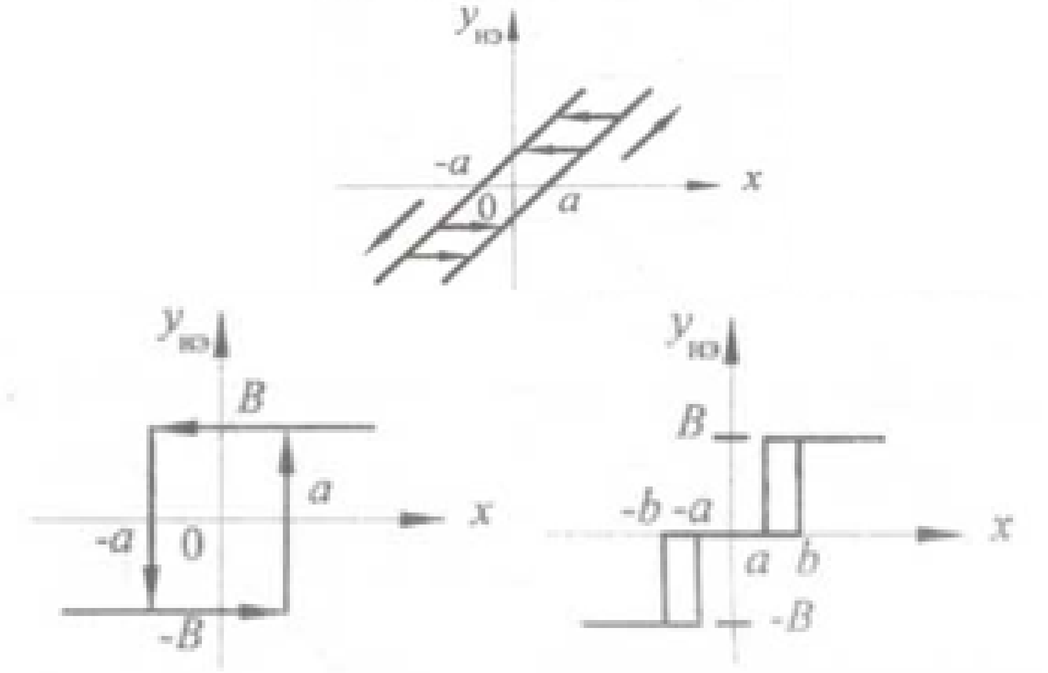
Общими особенностями этих элементов являются однозначность статических характеристик и отсутствие фазового сдвига между входными и выходными колебаниями.

Типовые нелинейные звенья

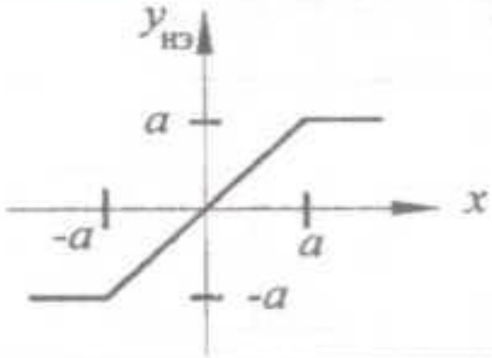
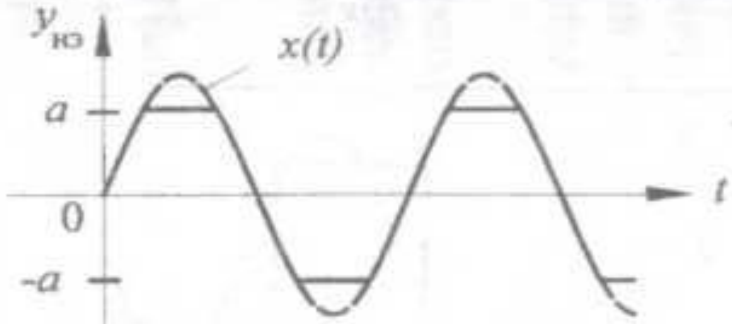
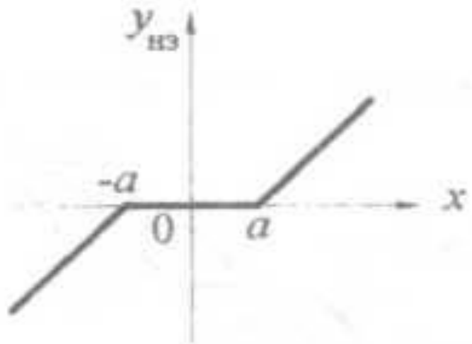
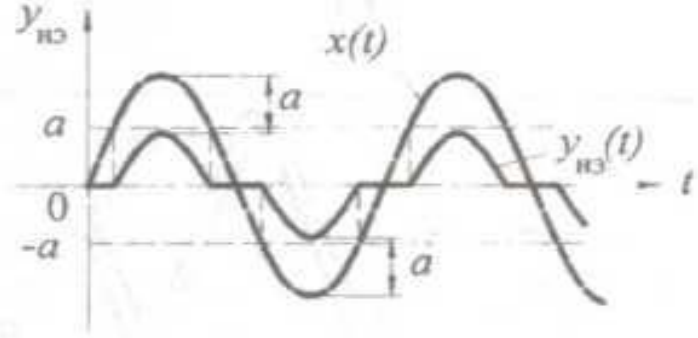
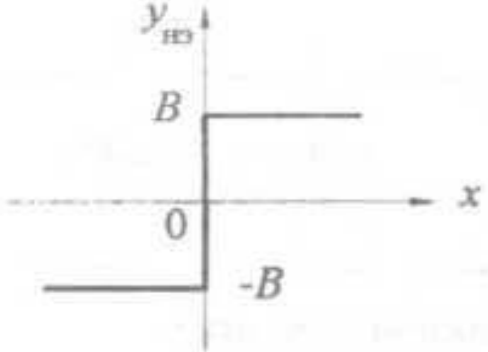
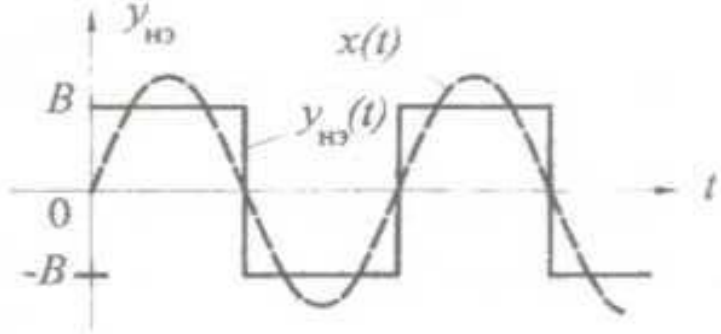
Остальные типовые нелинейности характеризуются неоднозначными статическими характеристиками (наличием гистерезиса), т.к. выход звена зависит не только от величины входного сигнала, но и от знака его скорости и вынужденные колебания на выходе отстают по фазе от входных.

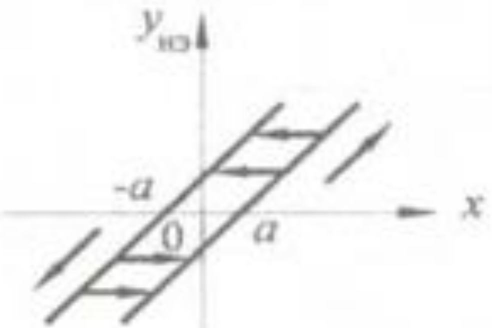
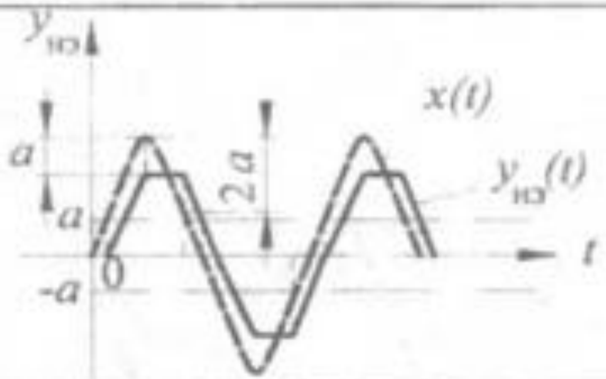
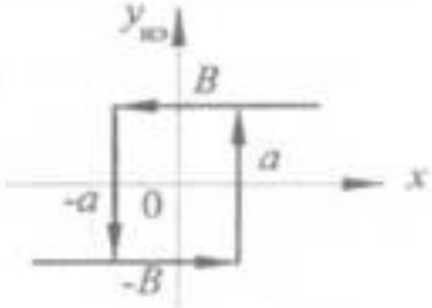
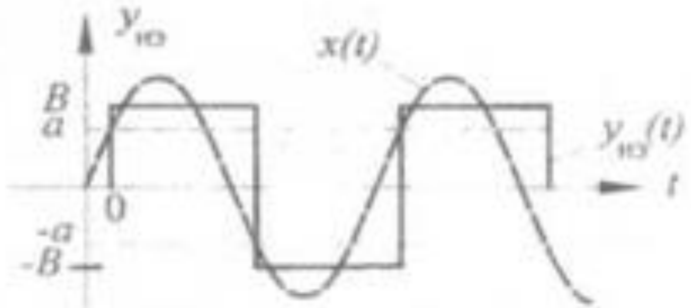
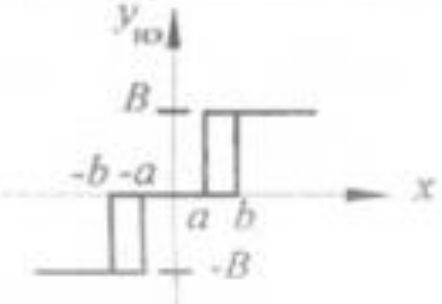
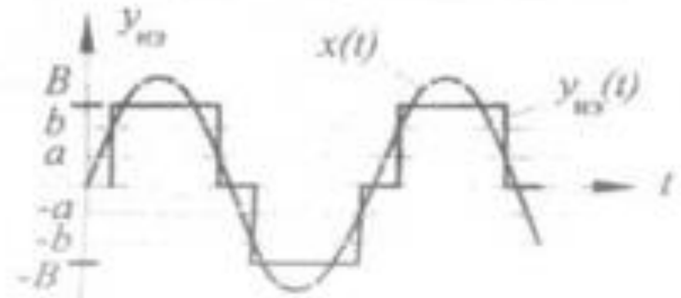
Наличие в системах регулирования *усилительных звеньев с зоной застоя* объясняется явлением «сухого» трения между движущимися частями механизмов, мертвым ходом и зазорами в механических элементах (например, трение в сальниках штока регулирующего застоя клапана).

Нелинейности типа двухпозиционного (и трехпозиционного) *реле с гистерезисом* характерны практически для всех двух- и трех-позиционных переключателей.



Далее приведены статические характеристики звеньев, их уравнения и показано преобразование ими гармонического сигнала $x(t) = A \sin \omega t$.

Наименование	Статическая характеристика	$x \rightarrow$ н.э $\rightarrow y_{нэ}$	Прохождение гармонического сигнала
1. Усилительное звено с ограничением амплитуды		$y_{нэ} = x$ при $\lvert x\rvert < a$ $y_{нэ} = a$ при $\lvert x\rvert > a$	
2. Усилительное звено с зоной нечувствительности		$y_{нэ} = \begin{cases} x+a & \text{при} \quad x<-a; \\ x-a & \text{при} \quad x>a; \\ 0 & \text{при} \quad \lvert x\rvert < a; \end{cases}$	
3. Двухпозиционное реле		$y_{нэ} = \begin{cases} B \text{ при } x>0; \\ -B \text{ при } x<0; \end{cases}$	

Наименование	Статическая характеристика	$x \to$ н.э $\to y_{нэ}$	Прохождение гармонического сигнала
1. Усилительное звено с зоной застоя		$y_{нэ}=\begin{cases} x-a \text{ при } \frac{dx}{dt}>0; \\ x+a \text{ при } \frac{dx}{dt}<0; \end{cases}$ $\frac{dy_{нэ}}{dt}=0$ при $\lvert y_{нэ}-x\rvert<a$;	
2. Двухпозиционное реле с зоной возврата		$y_{нэ}=\begin{cases} \left.\begin{array}{l} B \text{ при } x>-a \\ -B \text{ при } x<-a \end{array}\right\} \text{если } \frac{dx}{dt}<0; \\ \left.\begin{array}{l} -B \text{ при } x<a \\ B \text{ при } x>a \end{array}\right\} \text{если } \frac{dx}{dt}>0; \end{cases}$	
3. Трехпозиционный релейный элемент с зоной нечувствительности и зоной возврата		$y_{нэ}=\begin{cases} \left.\begin{array}{l} -B \text{ при } x<-a \\ 0 \text{ при } -a<x<b \\ B \text{ при } x>b \end{array}\right\} \text{если } \frac{dx}{dt}>0; \\ \left.\begin{array}{l} B \text{ при } x>a \\ 0 \text{ при } -b<x<a \\ -B \text{ при } x<-b \end{array}\right\} \text{если } \frac{dx}{dt}<0; \end{cases}$	

Метод гармонической линеаризации

Особенности поведения нелинейных систем создают трудности их математического описания.

Во многих случаях возможно и целесообразно заменить реальные нелинейные характеристики некоторыми приближенными линейными зависимостями.

Метод гармонической линеаризации позволяет получить приближенные частотные характеристики для существенно нелинейных элементов.

Если на вход безынерционного элемента с характеристикой $y = f(x)$ подается гармонический сигнал $x = A \sin \omega t$ он, то на выходе элемента устанавливаются периодические колебания, которые можно представить с помощью ряда Фурье в виде суммы гармонических составляющих:

$$y(t) = a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \left(a_j \sin j\omega t + b_j \cos j\omega t\right),$$

где $$a_0 = \frac{2}{T_0} \int_0^{2\pi} f(A \sin \omega t)\, d(\omega t);$$

$$a_j = \frac{2}{T_0} \int_0^{2\pi} f(A \sin \omega t) \sin j\omega t \; d(\omega t);$$

$$b_j = \frac{2}{T_0} \int_0^{2\pi} f(A \sin \omega t) \cos j\omega t \; d(\omega t).$$

Предположим: по сравнению с первой гармоникой все высшие гармоники, начиная со второй, имеют достаточно малую амплитуду и ими можно пренебречь тогда:

$$y(t) = a_0 + a_1 \sin \omega t + b_1 \cos \omega t$$

или

$$(\text{если } a_0 = 0)\; y(t) = c_1 \sin(\omega t + \varphi),$$

где $c_1 = \sqrt{a_1^{\,2} + b_1^{\,2}}; \quad \varphi = \operatorname{arctg} \dfrac{b_1}{a_1}.$

Метод гармонической линеаризации

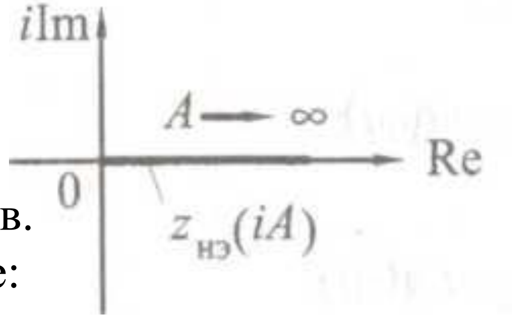
Сравнивая первую гармоническую составляющую выходного сигнала с входным сигналом, получают частотные характеристики нелинейного элемента, аналогичные частотным характеристикам линейных систем.

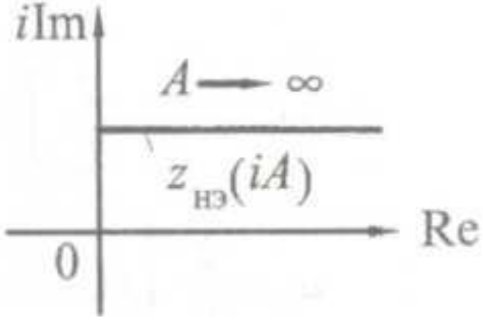
$$z_{\text{нэ}}(iA) = \frac{1}{W_{\text{нэ}}(iA)} = \left[\frac{1}{M_{\text{нэ}}(A)}\right] e^{-i\varphi(A)}$$

Из графиков вынужденных колебаний нелинейных элементов (см. табл.) видно, что фазовые сдвиги выходных колебаний по отношению к входному сигналу наблюдаются только для элементов с гистерезисными характеристиками. Следовательно, для этих элементов АФХ является комплексной функцией амплитуды входного сигнала.

Для элементов с однозначными характеристиками $\varphi_{\text{нэ}} = 0$ т.е. АФХ – действительная функция амплитуды входного сигнала.

Частотные характеристики нелинейных элементов.
Инверсные АФХ двухпозиционных реле:
идеальное реле и реле с гистерезисом.





Метод фазовой плоскости

Одним из основных методов исследования нелинейных систем является метод фазового пространства, введенный в теорию колебаний академиком А.А. Андроновым.

Фазовым называется такое пространство, в котором прямоугольными координатами точки являются величины, определяющие мгновенное состояние системы. Эти величины называются фазовыми координатами системы, их число равно числу степеней свободы системы.

Фазовые координаты могут иметь любой физический смысл (температура, давление, концентрация в т.п.). Часто в качестве фазовых координат выбирают выходную переменную $y(t)$ и ее производные по времени.

Метод фазового пространства применим как для линейных, так и для нелинейных систем.

Пусть имеется линейное ДУ n-го порядка $$a_n y^{(n)}(t) + \cdots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(t).$$

Этому уравнению соответствует система из n линейных ДУ первого порядка.

Рассматривается свободное движение системы, т.е. переходный процесс в системе после снятия возмущения, который описывается однородным ДУ (правая часть равна нулю). Будут равны нулю функции $f_1(t) = f_2(t) = \ldots = f_n(t) = 0$.

Метод фазовой плоскости

Уравнения и для нелинейно системы:

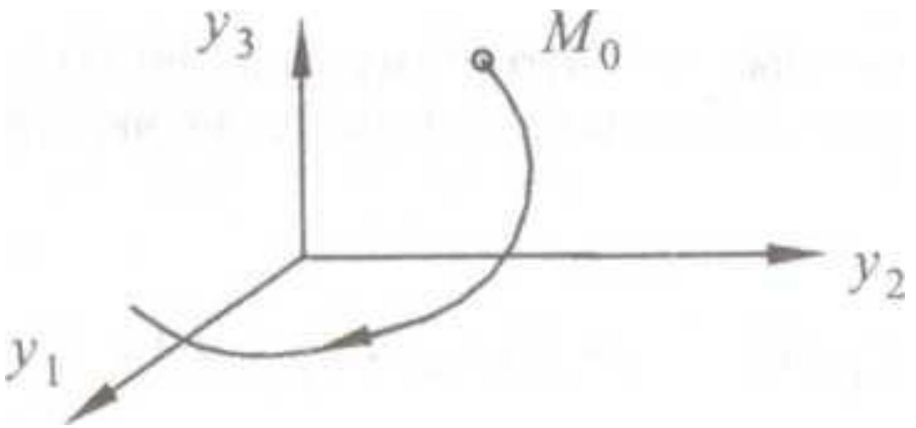
$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = F_1(y_1, y_2, \ldots, y_n); \\ \dfrac{dy_2}{dt} = F_2(y_1, y_2, \ldots, y_n); \\ \dfrac{dy_n}{dt} = F_n(y_1, y_2, \ldots, y_n). \end{cases}$$

где $y_1,\ldots,y_n$ – фазовые координаты,
$F_1,\ldots,F_n$ – нелинейные функции.

Точка фазового пространства, соответствующая состоянию системы в момент времени t, называется изображающей точкой (M).

Изменению состояния системы со временем будет соответствовать движение изображающей точки в фазовом пространстве по определенной траектории, которая называется фазовой траекторией.

Каждому переходному процессу в реальной системе соответствует определенная фазовая траектория в фазовом пространстве и наоборот.



Фазовое пространство системы третьего порядка

Метод фазовой плоскости

Начальные условия переходного процесса определяют координату изображающей точки на фазовой траектории в начальный момент времени (M_0).

Совокупность фазовых траекторий, соответствующих всем возможным в данной системе начальным условиям, называется *фазовым портретом системы*.

Распространение метод фазового пространства по лучил при исследовании систем второго порядка. При этом фазовым пространством является плоскость.

В фазовых координатах ДУ нелинейной системы второго порядка записывают в виде, где P и Q – нелинейные функции.

$$\frac{dy_1}{dt} = P(y_1, y_2); \quad \frac{dy_2}{dt} = Q(y_1, y_2),$$

Преобразовав получим ДУ фазовых траекторий

$$\frac{dy_2}{dy_1} = \frac{Q(y_1, y_2)}{P(y_1, y_2)}.$$

Решение ДУ дает семейство интегральных кривых на фазовой плоскости, по которым строят фазовые траектории.

Через каждую точку фазовой плоскости проходит только одна фазовая траектория, т.е. фазовые траектории не могут пересекаться в обычных точках фазовой плоскости.

Начало координат фазовой плоскости соответствует состоянию равновесия системы. Эта точка называется особой точкой, так как в ней фазовые траектории пересекаются, а значение dy_2 / dy_1 не определено.

Фазовые портреты линейной системы

Существуют разные типы особых точек, которые различаются по характеру поведения фазовых траекторий вблизи

ДУ системы

$$a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y(t) = 0$$

Перепишем в фазовых координатах, обозначив координату $y(t)$ через $y_1(t)$, а производную dy/dt через $y_2(t)$, тогда

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = y_2 ; \\ \dfrac{dy_2}{dt} = -\dfrac{a_1}{a_2} y_2 - \dfrac{a_0}{a_2} y_1 . \end{cases}$$

Разделив второе уравнение на первое, получим ДУ фазовых траекторий

$$\frac{dy_2}{dy_1} = -\frac{a_1}{a_2} - \frac{a_0}{a_2} \frac{y_1}{y_2}$$

Проинтегрировав, найдем уравнение фазовых траекторий в виде функции $y_2 = f(y_1, C_1, C_2)$, где C_1, C_2 – постоянные интегрирования.

Конкретный вид функции f будет определяться коэффициентами a_0, a_1, a_2, т.е. корнями характеристического уравнения системы p_1, p_2 которые также зависят от этих коэффициентов.

$$a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0 \Rightarrow p_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}}{2a_2}$$

Виды фазовых портретов

В зависимости от соотношения коэффициентов возможны шесть вариантов корней p_1, p_2 и шесть видов фазовых портретов линейной системы второго порядка, соответствующих различным видам свободного движения:

1 – корни чисто мнимые (система на границе устойчивости)

$a_1 = 0$, $a_0 > 0$, $a_2 > 0$.

$$p_{1,2} = \pm i\omega, \quad \omega = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}};$$

2 – корни комплексные с отрицательной действительной частью (устойчивая система с колебательным свободным движением)

при $a_0 > 0$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $D = a_1^2 - 4\,a_0 a_2 < 0$,

$$p_{1,2} = \alpha \pm i\omega; \qquad \alpha = -\frac{a_1}{2a_2} < 0; \qquad \omega = \frac{\sqrt{D}}{2a_2};$$

3 – корни комплексные с положительной действительной частью (неустойчивая система с колебательным свободным движением)

при $a_0 > 0$, $a_1 < 0$, $a_2 > 0$, $D < 0$,

$$p_{1,2} = \alpha \pm i\omega; \quad \alpha > 0;$$

Виды фазовых портретов

4 – корни действительные отрицательные (устойчивая система с неколебательным свободным движением)
при $a_0 > 0$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $D > 0$, $p_{1,2} = \alpha \pm \beta, \quad \beta = \sqrt{D}/2a_2, \quad \alpha < 0;$

5 – корни действительные положительные (неустойчивая система с неколебательным свободным движением)
при $a_0 > 0$, $a_1 < 0$, $a_2 > 0$, $D > 0$, $p_{1,2} = \alpha \pm \beta, \quad \alpha > 0, \quad \alpha > \beta;$

6 – корни действительные разных знаков (неустойчивая система с неколебательным свободным движением)
при $a_0 < 0$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $D > 0$,
$\alpha < 0$, $\beta >| \alpha |$, $p_1 = \alpha - \beta < 0$; $p_2 = \alpha + \beta > 0$.

Каждому из рассмотренных вариантов свободного движения системы соответствует свой тип фазового портрета.

Типы фазовых портретов

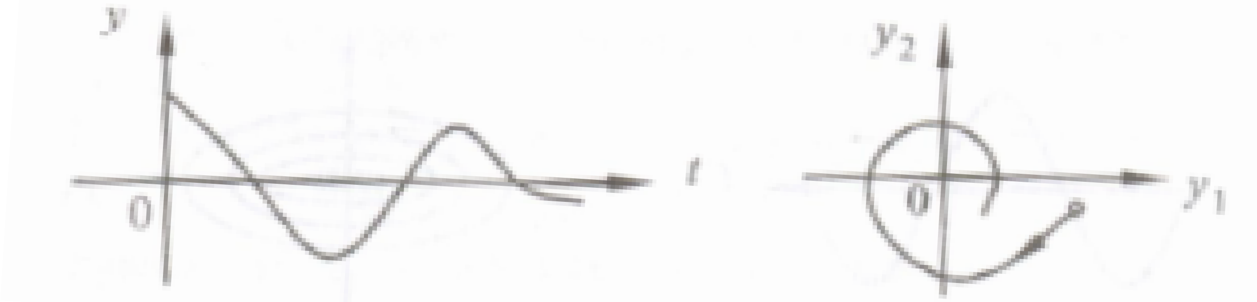
Переходный процесс Фазовый портрет

Случай 1.

Фазовый портрет типа «центр».

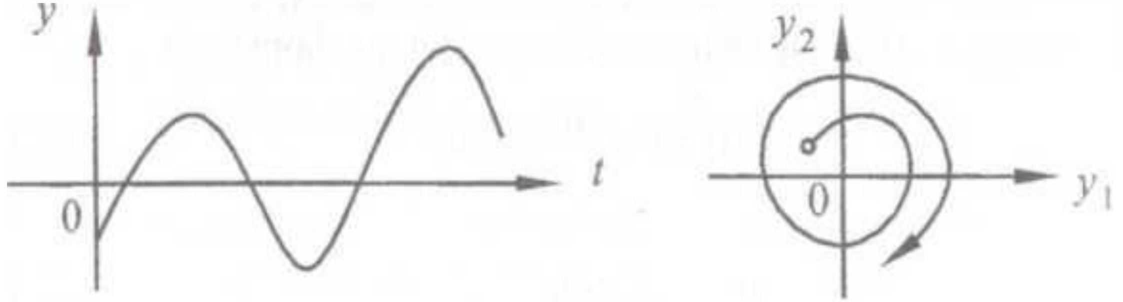
Случай 2.

Фазовый портрет типа «устойчивый фокус».



Случай 3.

Фазовый портрет типа «неустойчивый фокус».

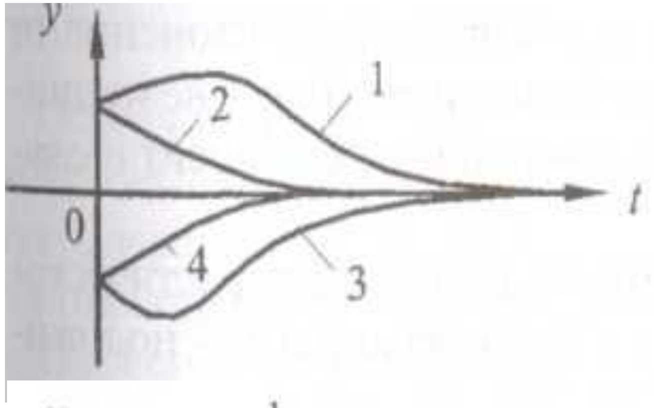


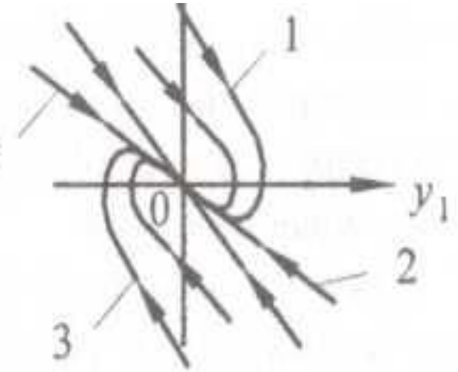
Типы фазовых портретов

Переходный процесс Фазовый портрет

Случай 4.

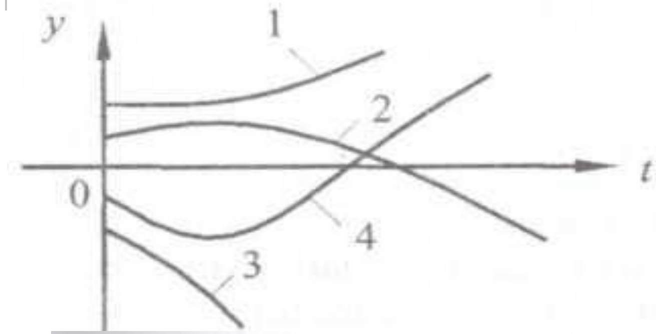
Фазовый портрет типа «устойчивый узел».

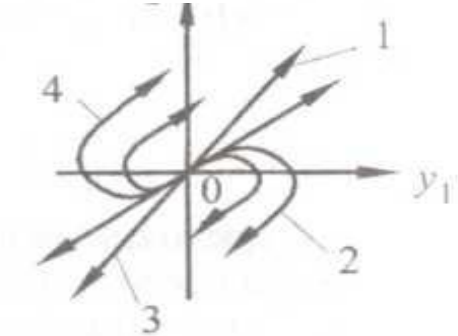




Случай 5.

Фазовый портрет типа «неустойчивый узел».

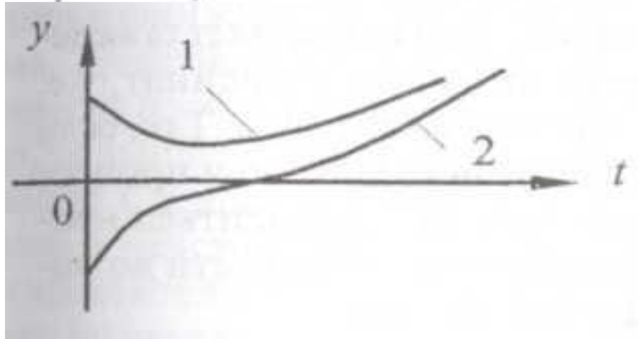


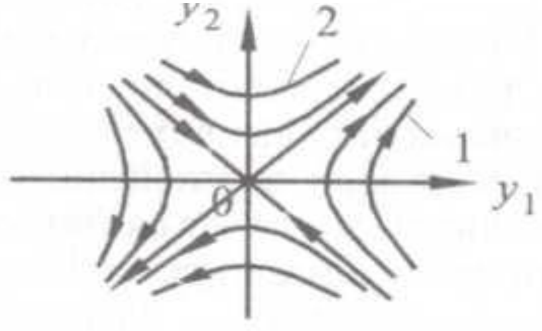


Случай 6.

Фазовый портрет типа

«седло».





Фазовые портреты нелинейных систем

Принципиальные отличия фазовых портретов нелинейных систем от линейных вытекают из характерных свойств нелинейных систем.

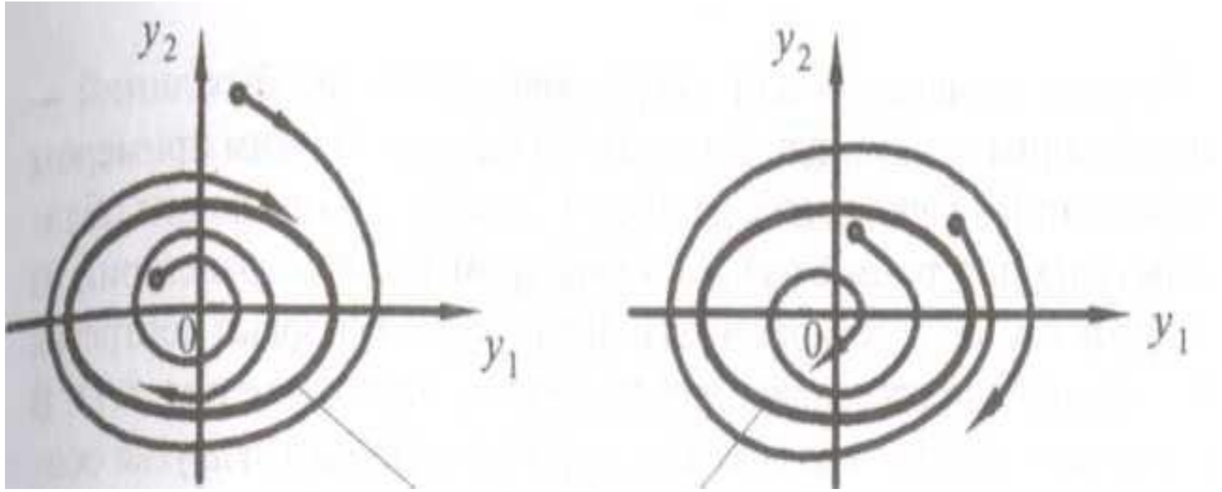
Для линейной системы характер особой точки полностью определяет поведение системы при любых отклонениях от состояния равновесия (если линейная система устойчива, т.е. устойчиво ее состояние равновесия, то из любой точки фазовой плоскости фазовые траектории будут стремиться к началу координат, если линейная система неустойчива, т.е. неустойчиво ее состояние равновесия, то при любых начальных условиях фазовые траектории будут неограниченно удаляться от начала координат.

В нелинейной системе характер особой точки определяет поведение фазовых траекторий только вблизи от начала координат, т.е. при малых отклонениях от состояния равновесия системы.

Если состояние равновесия нелинейной системы неустойчиво и процесс расходится, то может оказаться, что он не будет расходиться неограниченно: амплитуда колебаний в системе может вырасти до определенного предела и далее оставаться постоянной.

Кроме особой точки, находящейся в начале координат, фазовый портрет содержит и особую траекторию – *предельный цикл.*

Предельные циклы



Примеры фазовых портретов
нелинейных систем
с автоколебаниями

Предельный цикл – изолированная замкнутая траектория близкая к состоянию равновесия, к которой фазовые траектории приближаются, скручиваясь от начала координат. К нему же идут траектории, находящиеся снаружи предельного цикла.

Предельные циклы соответствуют автоколебаниям в системе и могут быть устойчивыми или неустойчивыми. В случае *устойчивого* предельного цикла фазовые траектории снаружи и изнутри накручиваются на предельный цикл. В такой системе в реальных условиях будет обязательно наблюдаться автоколебательный режим.

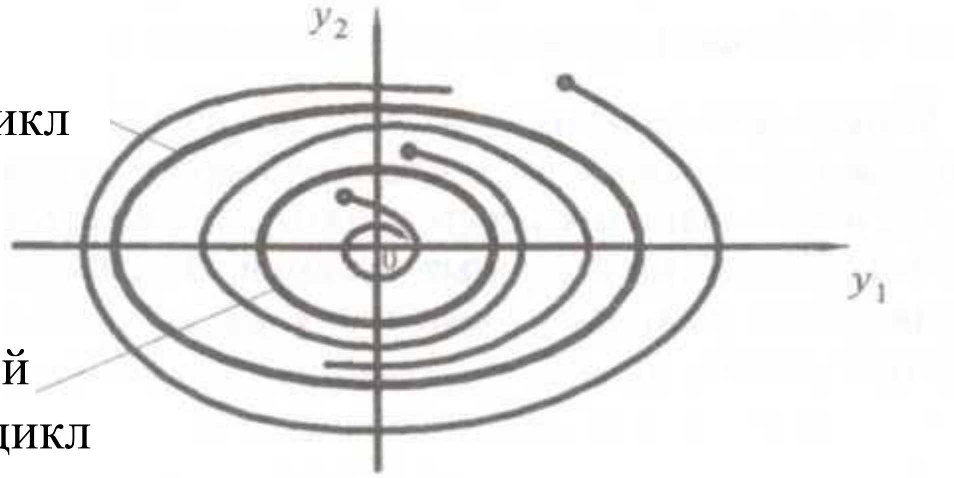
Если фазовые траектории с обеих сторон от предельного цикла удаляются от него, то он называется *неустойчивым и* соответствует неустойчивым автоколебаниям.

Реальные процессы, которые могут наблюдаться в такой системе, зависят от начальных условий.

Предельные циклы

Устойчивый
предельный цикл

Фазовый портрет нелинейной системы с
двумя предельными циклами



Неустойчивый
предельный цикл

Если изображающая точка находится внутри предельного цикла, то она будет двигаться по фазовой траектории к началу координат, т.е. система ведет себя как устойчивая, приближаясь к состоянию равновесия.

Если в начальный момент изображающая точка находится снаружи предельного цикла, то амплитуда колебаний в системе будет нарастать до бесконечности и рассматриваемая система устойчива «в малом» и неустойчива «в большом».

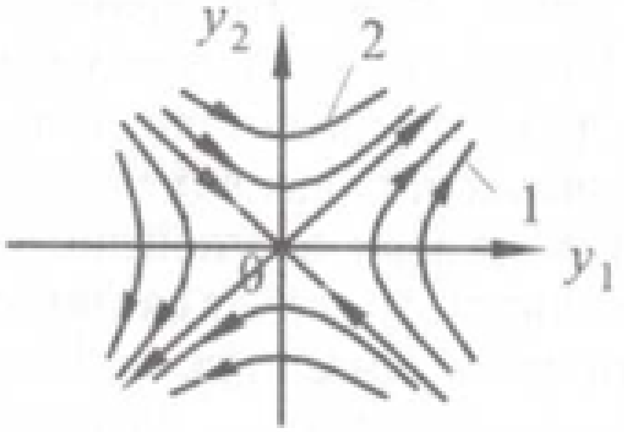
Неустойчивые автоколебательные режимы не могут наблюдаться в реальных системах, подверженных действию случайных возмущений.

В системе может быть не один, а несколько предельных циклов, соответствующих нескольким возможным автоколебательным режимам, отличающимся друг от друга амплитудой и периодом.

Разновидности фазовых траекторий

Сепаратрисы – разновидность фазовых траекторий, разделяющие области фазовых портретов с разным характером фазовых траекторий.

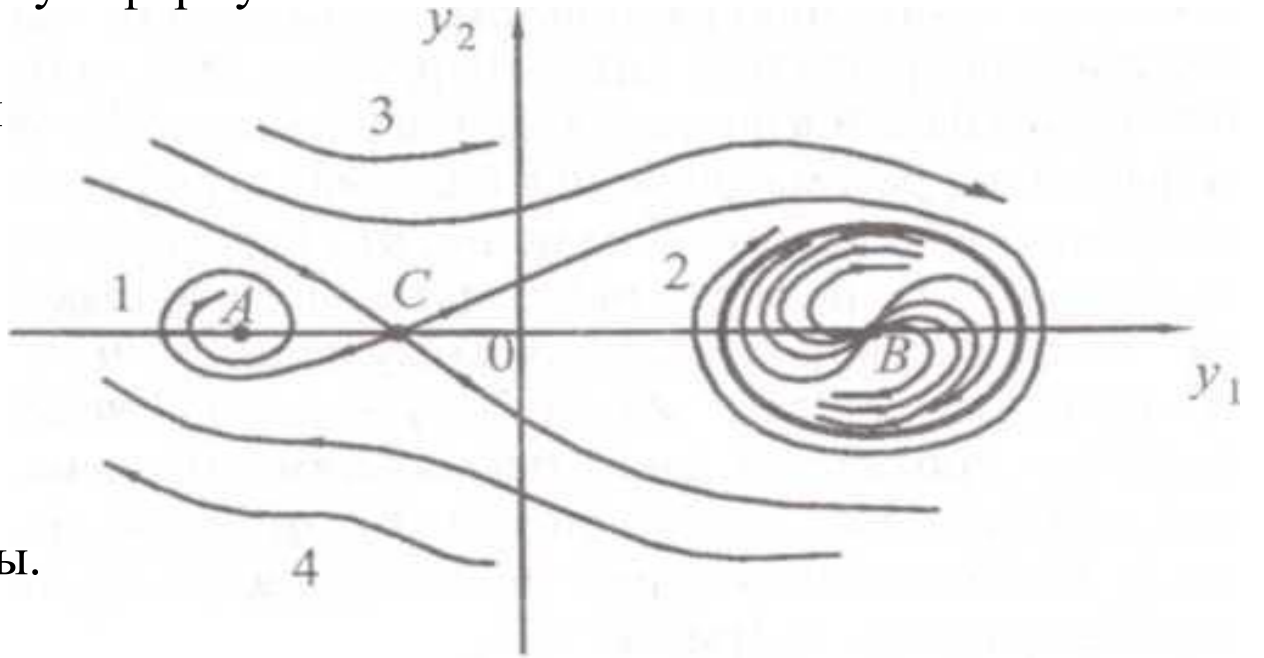
В линейных системах сепаратрисы присутствуют в фазовых портретах типа «седло» и представляют собой прямые линии.



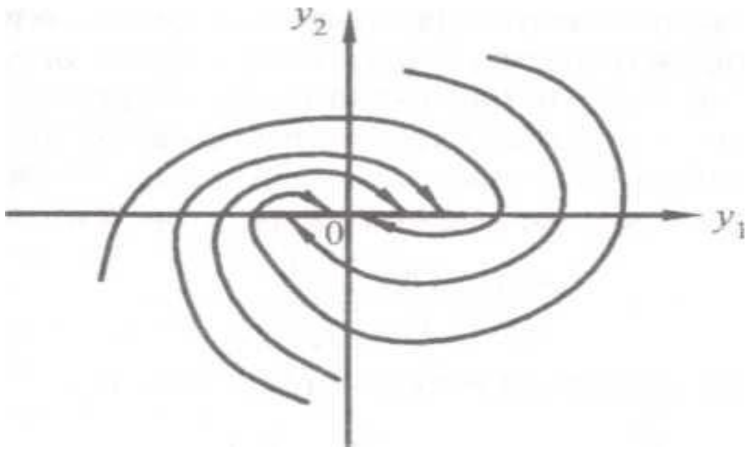
В нелинейной системе, кроме седла, могут существовать и другие особые точки, а сепаратрисы имеют произвольную форму.

Пример фазового портрета нелинейной системы с тремя особыми точками:
устойчивый фокус (*A*),
неустойчивый узел (*B*) и седло (*C*).

Сепаратрисы седла выделяют четыре области:
1 – затухающие колебания,
2 – автоколебания,
3 и 4 – неустойчивые апериодические процессы.



Нелинейные системы с зоной нечувствительности



Фазовый портрет нелинейной системы с зоной нечувствительности

Особенность нелинейных систем с элементами, имеющими зону нечувствительности и сухое трение – наличие области стационарных режимов, соответствующих установившемуся состоянию.

На фазовой плоскости это выражается вытягиванием особой точки, например, узел в особую линию.

Построение фазовых портретов для линейных систем второго порядка может быть выполнено непосредственно по уравнениям фазовых траекторий.

Для нелинейных систем задача усложняется, т. к. в большинстве случаев получить в аналитической форме уравнение для фазовых траекторий не удается.

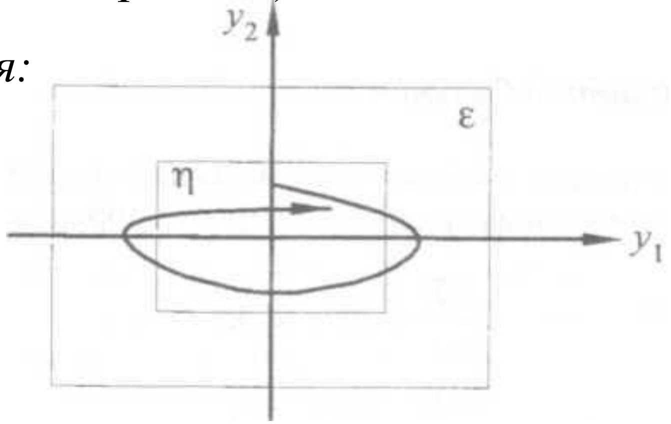
Для построения фазовых портретов нелинейных систем используют приближенные методы:

- численное интегрирование уравнений для фазовых траекторий;
- метод изоклин;
- метод припасовывания.

Устойчивость нелинейных систем

Общая теория устойчивости нелинейных систем развита А.М. Ляпуновым.

При исследовании устойчивости нелинейных систем рассматривается устойчивость отдельных видов движения (устойчивость состояния равновесия, устойчивость автоколебательного режима).



Определение устойчивости по Ляпунову в применении к состоянию равновесия:

Состояние равновесия является **устойчивым,**
если для любой заданной области допустимых отклонений **ε** можно указать такую область **η(ε)**, окружающую состояние равновесия, что ни одно движение, начинающееся внутри **η**, никогда не достигнет границы **ε**.

Состояние равновесия называется **неустойчивым,**
если может быть указана такая область отклонений от состояния равновесия (область **ε**), для которой не существует области **η**, окружающей состояние равновесия и обладающей тем свойством, что ни одно движение, начинающееся внутри **η**, никогда не достигнет границы области **ε.**

Условия устойчивости могут быть записаны:

Состояние равновесия ($y_1 = 0$, $y_2 = 0$) устойчиво, если для любого заданного **ε** > 0 имеется такое **η(ε)**, что, если при $t = 0$

$$|y_1(0)| < \eta \text{ и } |y_2(0)| < \eta \text{, то для любого } t > 0,$$

$$|y_1(t)| < \varepsilon \text{ и } |y_2(t)| < \varepsilon.$$

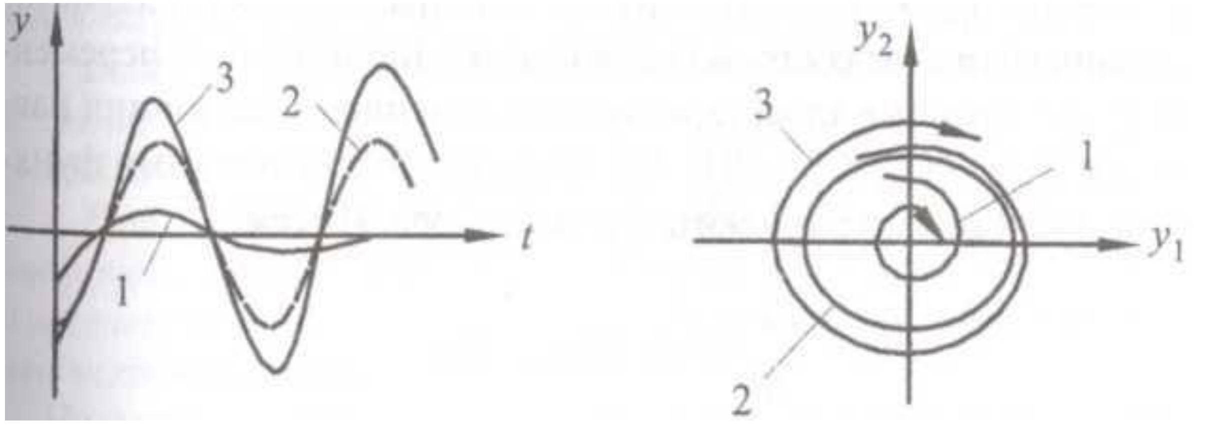
Устойчивость в «малом»

Для устойчивой системы не требуется, чтобы она возвращалась к прежнему состоянию равновесия, а достаточно, чтобы движение изображающей точки происходило внутри допустимой области отклонений **ε**.

Если система не только не выходит за границы допустимой области, но и возвращается к прежнему состоянию равновесия, то такая система называется *асимптотически устойчивой.*

Устойчивость состояния равновесия по Ляпунову гарантирует устойчивость «в малом», т.е. при небольших отклонениях от состояния равновесия.

Система может оказаться неустойчивой в большом.



На рис. состояние равновесия устойчиво в «малом». При небольших отклонениях от состояния равновесия движение в системе асимптотически устойчиво (фазовая траектория 1 и соответствующая ей траектория движения 1).

При значительном отклонении от состояния равновесия система движется от состояния равновесия (фазовая траектория и траектория движения 3).

Траектория движения 2 (и фазовая траектория 2) соответствует неустойчивому предельному циклу.

Для исследования устойчивости нелинейных систем Ляпуновым предложено два метода.

Первый позволяет исследовать устойчивость системы «в малом», а второй – «в большом».

Методы Ляпунова

Теоремы первого метода Ляпунова:

Если линейная система первого приближения устойчива, то и состояние равновесия исходной нелинейной системы будет устойчиво.

Если линейная система первого приближения неустойчива, то состояние равновесия исходной нелинейной системы также будет неустойчиво.

Если линейная система первого приближения находится на границе устойчивости, то судить об устойчивости нелинейной системы но уравнениям первого приближения нельзя и необходимо рассматривать исходную нелинейную систему.

Второй метод Ляпунова позволяет исследовать *абсолютную устойчивость* нелинейной системы или устойчивость в «большом».

Вводят вспомогательную функцию нескольких переменных и определяет ли она в рассматриваемой области знак (знакоопределённая, знакопостоянная, знакопеременная).

$$\frac{dy_j}{dt} = F_j(y_1, y_2, \ldots, y_n), \quad j = \overline{1, n}.$$

Теорема второго метода Ляпунова:

Если для заданной нелинейной системы *n*-го порядка можно подобрать такую знакоопределенную функцию Ляпунова $V(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, чтобы ее производная по времени dV/dt, взятая вдоль фазовой траектории, также была знакоопределенной (или знакопостоянной), но имела знак, противоположный знаку V, то данная система устойчива, причем для знакоопределенной функции dV/dt – асимптотически устойчива.

Методы определения автоколебаний

На фазовой плоскости автоколебательному режиму соответствует предельный цикл.

Автоколебательные режимы наблюдаются в нелинейных системах, поэтому изучение этих режимов, выявление условий их возникновения, исследование параметров автоколебаний (амплитуды и периода) важны.

Для реальных систем определение автоколебаний сложная проблема. Можно воспользоваться критериями, чтобы показать, что в фазовом портрете системы нет замкнутых фазовых траекторий, т.е. нет автоколебаний.

Существуют различные критерии отсутствия замкнутых фазовых траекторий, которые дают достаточные условия невозможности возникновения автоколебаний.

Наиболее прост для практического применения критерий Бендиксона.

Пусть система описывается уравнениями

$$\frac{dY_1}{dt} = P(Y_1, Y_2);$$
$$\frac{dY_2}{dt} = Q(Y_1, Y_2).$$

где $P(Y_1, Y_2)$ и $Q(Y_1, Y_2)$ – нелинейные функции, аналитические на всей фазовой плоскости.

Критерий Бендиксона формулируют так:

Если в некоторой области на фазовой плоскости выражение $\partial P/\partial Y_1 + \partial Q/\partial Y_2$ знакопостоянно, то в этой области не существует замкнутых фазовых траекторий.

В тех случаях, когда критерий Бендиксона не выполняется или не может быть использован (функции P и Q не являются аналитическими), применяют другие методы для определения автоколебательных режимов:

- метод гармонического баланса;
- метод точечного преобразования.