**Лекция 1**

**1. Введение. Математические модели в экономике**

**1.1** **Понятие математической модели**

Под моделью в широком смысле слова в науке принято понимать аналог, «заместитель» оригинала, который при определенных условиях воспроизводит интересующие исследователя свойства. Строя модель, мы создаем идеальное отображение реальной действительности, чтобы продемонстрировать ее свойства. Потребность в моделях объясняется сложностью реального мира.

Модель — это теоретическое обоснование наших представлений о предмете, явлении или процессе; для исследователей она служит источником рабочих гипотез, проверяемых на соответствие фактам.

Модель раскрывает нам не всю истину, но ее полезную и существенную часть. Модель существенно проще оригинала и ее исследование провести зачастую легче и дешевле. Иногда (особенно в природе и технике) прямое изучение оригинала по тем или иным причинам просто невозможно и моделирование является единственным способом получить хоть какие-то сведения о нем.

**Типы моделей.** С точки зрения характера различают следующие основные виды моделей:

1. *Вербальная модель* – это просто словесное описание оригинала. Она производится на основе обычного человеческого языка.

2. *Графическая модель* – модель, которая представляется в виде некоего изображения. Например, географическая карта представляет собой модель земной поверхности; чертеж детали является ее графической моделью; структурная схема административного устройства организации (учреждения, фирмы и др.) является графической моделью этой организации, на основе которой можно, например, изучать и совершенствовать процедуры документо-оборота или принятия решений.

3. *Натурное моделирование*, при котором оригинал заменяется своим физическим подобием (макетом). Натурными моделями служат наглядные пособия в учебных лабораториях; различные тренажеры для обучения сотрудников предприятий, шоферов, пилотов, операторов сложных производственных систем и др.). Макетами пользуются и при разработке некоторых технических систем (например, при разработке новых самолетов или автомобилей их макеты сначала обдувают воздухом в аэро-динамических трубах для выбора обтекаемой формы корпуса).

4. *В математических моделях* для описания изучаемого объекта используется язык математики. Существует большое количество типов математических моделей, которые в последнее время стали называть *информационными моделями*.

Все законы физики сформулированы в виде уравнений или соотношений, поэтому физику можно рассматривать как набор математических моделей.

**Роль моделей**.

1. Построение моделей неизбежно, потому что нет четкой границы между фактами и нашими представлениями о них. Моделирование неизбежно, ибо это основной путь передачи наших представлений об окружающем нас мире, поскольку:

*Модели – это теории, законы, уравнения связи или догадки, формулирующие наше суждение о мире, каким он нам представляется.*

 В современной научной литературе понятие «модель» и «теория» трактуются неоднозначно, граница между этими понятиями размыта. В методологии науки признана в настоящее время следующая трактовка различий между двумя этими понятиями:

* модель – это концептуальный инструмент, ориентируемый в первую очередь на управление моделируемым процессом или явлением. При этом функция предсказания, прогнозирования служит целям управления;
* теория – более абстрактное, чем модель, концептуальное средство, основной целью которого является объяснение данных процессов, явлений. Функция предсказания в теории ориентирована на цели объяснения явлений.

 Теория считается более глубокой по уровню понимания, и более значимой, чем модель. Всякая теория является моделью, но не наоборот.

2. Моделирование экономично, так как оно позволяет передать главную, основную информацию в весьма сжатом виде.

3. Моделирование стимулирует дальнейшее развитие науки, ибо каждая модель служит основой для дальнейших исследований.

**Функции модели.**

1) *Теоретическое объяснение и понимание* исследуемого объекта или явления. При разработке модели исследователь должен описать структуру оригинала, функциональные связи или предполагаемые механизмы его функционирования. Модель подправляется до тех пор, пока не даст удовлетворительного описания объекта исследований.

2) *Прогностическая*. Строя и исследуя модель, ее реакцию на те или иные воздействия, мы можем прогнозировать поведение реальной модели. Если математическая модель зависит от времени и правильно описывает, как вел себя процесс в прошлом, и как он ведет себя в настоящий момент времени, то можно ожидать от модели получение картины будущего развития. Особенно это ценно в социально-экономических моделях, где эксперимент невозможен или очень дорог.

3) *Эвристическая* функция модели. Модели зависят от параметров. Например, в модели химической реакции входят константы скоростей элементарных стадий, коэффициенты диффузии, значения температуры и парциальных давлений газов и т. п. Правильно описывая процесс для некоторого набора параметров, модель позволяет порой получить неожиданный результат для другого набора параметров, и в этом смысле служит генератором новых идей и решений.

4) *Коммуникативная.* Математические модели различных явлений, написанные на общем языке, позволяют объединять ученых разных направлений, обмениваться идеями и методами, и решать важнейшие междисциплинарные проблемы. ХХI век – это век расцвета междисциплинарных исследований.

**Общность математических моделей.** Математические модели позволяют увидеть, обнаружить фундаментальное сходство у различных явлений и процессов. Накопленный опыт исследований показал, что многие процессы, происходящие в системах разной природы: физических, химических, экономических, социальных и других описываются одинаковыми уравнениями. Это означает, что механизмы сходных процессов в различных системах одни и те же. Например, некоторые циклические процессы в экономических системах, концентрационные колебания в химических реакциях аналогичны колебаниям численностей популяций в биологической системе типа «хищник-жертва» и описываются математической моделью Лотки-Вольтерра. Индивидуальность явления кроется в параметрах и интерпретации переменных.

Много общего найдено в процессах самоорганизации и эволюции, происходящих в различных нелинейных открытых системах, состоящих из многих частиц или объектов, взаимодействующих между собой и окружающей средой. Исследованием *явлений самоорганизации* занимается наука *синергетика*, зародившаяся в середине прошлого века. Синергетика сегодня имеет широкий арсенал математических методов и подходов к анализу динамики сложных систем, и уже накопила большое число базовых моделей, способных описать то или иное явление максимально просто. Синергетика сегодня претендует на роль сверхнауки, науки наук, объединяющей разные науки и ученых разных специальностей, вырабатывающей единый язык, понятный для всех, оперирующая такими терминами как устойчивость и неустойчивость, аттракторы, диссипативные структуры, самоорганизация, бифуркация и т.д.

**Классификация математических моделей**

Детальная классификация математических моделей естественно связана с содержательной частью модели и зависит от области ее применения. Однако существует общая классификация моделей, не связанная с областью ее применения.

Математические модели подразделяются:

***а***) *по типу уравнений* на

* линейные модели (уравнения линейные);
* нелинейные модели (уравнения нелинейные).

***б***) *по отношению к изменению во времени* на:

* стационарные (не зависящие от времени);
* динамические (разворачивающиеся во времени).

***в***) *по отношению к зависимости от пространственных координат на*:

* точечные (не зависящие от пространственных координат);
* распределенные (описывающие распределение функций в пространстве).

***г***) *по отношению к типу уравнений, описывающие связи на*

* непрерывные (основанные на дифференциальных уравнениях);
* дискретные (основанные на разностных уравнениях);
* с запаздыванием (основанные на дифференциальных уравнениях с запаздыванием);
* стохастические (учитывающие влияние флуктуаций и использующие генератор случайных чисел);
* вероятностные (основанные на уравнениях, описывающих изменение вероятностей состояния);

***д***) *по отношению к поиску причин или следствий на*:

* прямые;
* обратные

 Наиболее широко используются линейные модели, т. к., с одной стороны, их проще исследовать математическими методами, а с другой стороны, они достаточно хорошо описывают реальную ситуацию, потому что на практике часто можно пренебречь нелинейными эффектами. Популярность линейных моделей связана с наличием эффективного математического аппарата, активно развивающегося со времен Ньютона, создавшего интегральное и дифференциальное исчисление.

В последнее время все шире используются нелинейные модели. В первую очередь это связано с запросами практики (нелинейная оптика, нелинейная механика, физика плазмы, тепловые задачи с подвижными границами и т. п.). С другой стороны, это определяется успехами вычислительной математики, где созданы эффективные методы решения нелинейных задач, что дает возможность создавать системы вычислительного эксперимента с нелинейными моделями.

По структуре объекта математические модели подразделяются на непрерывные и дискретные. В непрерывных моделях для описания оригинала используются непрерывные функции, которые описываются непрерывными уравнениями. В дискретной модели объект моделирования определяется конечным набором констант, а уравнения, описывающие его поведение, является конечномерными операторами. Непрерывные и дискретные модели тесно связаны друг с другом. Для исследования одного и того же объекта может использоваться как непрерывная, так и дискретная модель. Использование непрерывной модели обычно удобно при проведении математического обоснования. Дискретная модель используется при проведении расчетов. Поэтому вначале строится непрерывная модель и проводится ее обоснование, а затем делается переход к дискретной модели и производится ее численный анализ. Переход от непрерывной модели к дискретной называется дискретизацией. При переходе к дискретной модели необходимо, чтобы результат моделирования по дискретной модели совпадал с требуемой точностью с результатом моделирования по непрерывной модели в области существенной для моделирования. При использовании численного анализа модели мы обязаны перейти к дискретной модели, т. к. при численном эксперименте должна использоваться конечномерная аппроксимация модели.

Важнейшими свойствами моделей являются их **полнота, адекватность и точность.**

*Полнота* характеризуется тем, какое количество характеристик оригинала отображает модель. Любая модель неполна по сравнению с оригиналом и какие-то характеристики при моделировании "теряются". Однако эти потерянные характеристики могут быть несущественными с точки зрения целей моделирования, а попытка их учесть путем дополнения модели только усложнит ее и затруднит исследование. Уровень полноты модели влияет на ее адекватность.

В наиболее общем случае *модель называют адекватной оригиналу*, если она удовлетворяет поставленным целям моделирования, и хорошо описывает требуемые черты оригинала. Адекватная модель качественно и/или количественно отображает оригинал. Прежде всего, поведение адекватной модели должно приближенно отображать основные качественные особенности поведения оригинала. Степень количественной близости харак-теристик модели и оригинала называется количественной адекватностью, или точностью модели и характеризуется величиной абсолютной или относительной погрешности – разницы между значениями реальных и модельных характеристик.

В зависимости от целей моделирования точность моделей, признаваемых адекватными, может быть различной. Так, для объяснения причин того или иного поведения оригинала зачастую высокая точность не обязательна, главную роль здесь играет сама возможность качественно верного отображения моделью особенностей поведения оригинала. При построении системы управления техническим устройством, наоборот, необходима максимально высокая точность модели этого устройства, так как на ее основе приходится точно рассчитывать величины управляющих воздействий, которые могут оказаться весьма малыми. Объяснение причин поведения оригинала в задачи такого моделирования не входит.

Это определяет выбор подходов к построению математических моделей. Для объяснения причин поведения системы строится ее теоретическая модель. Она учитывает структуру системы, взаимосвязь ее элементов и их влияние друг на друга. Точность теоретических моделей чаще всего невелика.

При построении систем управления в технике используются *эмпирические модели*, в которых внешние характеристики поведения оригинала, наоборот, измеряются достаточно точно, зато его внутренняя структура вообще не принимается во внимание (в таких случаях говорят, что система рассматривается, как "черный ящик").

Эмпирические модели отдельных элементов системы или отдельных элементарных процессов, происходящих в ней, могут также использоваться в составе теоретических моделей в виде отдельных коэффициентов или членов в уравнениях. Такие модели называются смешанными или полуэмпирическими. Применение эмпирических вставок в смешанных моделях повышает их точность по сравнению с чисто теоретическими. Такие модели используют при проектировании технических систем или принятии экономических решений.

**1.2. Особенности экономико-математического моделирования**

Математические модели экономических систем строятся для достижения одной из двух целей:

1. *Теоретические модели* предназначаются для изучения общих закономерностей и свойств экономических систем.

2. *Прикладные модели* строятся для выработки конкретных рекомендаций при принятии практических хозяйственных решений и носят, как правило, оптимизационный характер. По своей структуре они являются смешанными. Эмпирические вставки в таких моделях (уровни цен на товары и сырье, взаимосвязи экономических характеристик и показателей и т.п.) определяются путем статистических, маркетинговых и других исследований.

По масштабу моделируемой системы модели делятся на:

1. *Макроэкономические модели*. Они описывают эко-номику государства или экономико-географического региона в целом, связывая между собой укрупненные показатели: валовой национальный продукт, национальный доход, инфляцию, уровень занятости и т.п. Обычно такие модели являются теоретическими.

2. *Микроэкономические модели*. В них моделируемой системой является небольшая часть макроэкономической системы, чаще всего отдельное предприятие или его подразделение. Эти модели обычно носят оптимизационный характер и являются смешанными (полуэмпирическими).

Общая схема развития моделирования экономической и др. систем, а также роль моделирования в этом процессе отображена на рис. 1.1.

****

Рис.1.1. Роль моделирования в развитии экономической системы

При построении математических моделей в экономике надо учитывать, что большинство характеристик таких моделей нельзя определить точно. На их значения влияет много случайных факторов, которые точно определить невозможно. В результате характеристики экономических моделей оказываются случайными величинами, сгруппированными вокруг каких-то средних значений или осредненных зависимостей. Такие модели называются *стохастическими* (в отличие от *детерминированных* моделей, характеристики которых жестко заданы).

Методы определения средних значений и степени разброса характеристик экономических систем при их статистических обследованиях изучаются специальной экономико-математической дисциплиной – эконометрикой, в основе которой лежит аппарат теории вероятностей и математической статистики.

Таким образом, экономико-математические модели по своей природе являются в той или иной степени неопределенными. При теоретическом моделировании эта неопределенность остается за рамками исследования, т.к. целью моделирования является выявление как раз наиболее общих, осредненных закономерностей. При построении прикладных моделей неопределенность характеристик или изначально закладывается в модель, или подразумевается, что результат моделирования – это лишь наиболее вероятный вариант. Всегда есть вероятность того, что реальная ситуация будет развиваться не так, как предсказывает разработанная модель и надо принимать меры противодействия или страховки на этот случай.

При построении различных *эмпирических (и смешанных)* моделей надо учитывать еще одно обстоятельство, хорошо известное специалистам технических наук, но нередко забываемое экономистами. Оно заключается в том, что эмпирические закономерности, вообще говоря, нельзя экстраполировать (продолжать за пределы диапазона, охваченного экспериментальным исследованием), так как в неизученной области могут проявить себя принципиально иные эффекты, не характерные для уже исследованной области изменения факторов процесса.

В экономических исследованиях и практической деятельности широко используется понятие ***тренда*** (тенденции). Это эмпирическая закономерность изменения во времени того или иного экономического показателя, полученная путем обработки данных о его значениях в предыдущие моменты времени. Достаточно часто экономические решения принимаются на основе предположений о том, что эта же закономерность будет иметь место и в будущем (хотя бы на какой-то срок). Совсем обойтись без таких предположений нельзя – иначе стало бы невозможным никакое перспективное планирование. Однако при составлении планов следует критически анализировать имеющиеся тренды и учитывать возможность их нарушения. Анализ большинства экономических кризисов и катастроф показывает, что они связаны с некритическим продолжением на значительный срок в будущее каких-то трендов, имевших место в предшествующий период (роста цен на нефть, объемов ипотечного кредитования, числа вкладчиков финансовой "пирамиды" и т.п.).

Для изучения возможности возникновения, предсказания и объяснения причин таких кризисных ситуаций необходимо использовать теоретическое моделирование.

**1.3. Этапы построения экономико-математических моделей**

Общая схема процесса создания математической модели показана на рис. 1.2.



Рис. 1.2. Схема процесса математического моделирования

На этапе постановки задачи:

1. Определяется объект исследования.

2. Формулируется цель исследования, определяются характеристики системы, которые должна отображать построенная модель.

На этапе формализации:

1. Проводится анализ объекта исследования, определяются его основные структурные и функциональные элементы. Выявляются наиболее существенные характеристики этих элементов, влияющие на достижение поставленной цели моделирования (определяется степень полноты модели). Характеристики системы разделяются на *параметры модели* (характеристики, которые должны быть известны для построения модели) и *переменные модели*, которые должны быть определены в результате моделирования.

2. Вводятся символические обозначения используемых величин.

3. Производится математическое описание взаимосвязей между элементами и характеристиками системы – строится собственно экономико-математическая модель.

На этапе решения в зависимости от цели моделирования и структуры получившейся математической модели выбирается способ проведения расчетов и осуществляется решение задачи.

Различают три вида решения математических моделей:

1. *Точное, или аналитическое*. При таком решении результат получается в виде готовых формул для вычисления функций или отдельных величин по значениям параметров процесса. Точность полученного решения определяется только точностью вычисления по этим формулам и может, в принципе, быть сколь угодно высокой.

2. *Приближенное решение* получается с некоторой погрешностью, которая не может быть до конца устранена. Примером приближенного метода решения является графическое решение. Другие приближенные методы могут основываться на упрощении уравнений модели за счет отбрасывания малых слагаемых или разложения функций в ряды по степеням малого параметра с сохранением ограниченного числа членов ряда (особенно часто сохраняется только первый член разложения, так, чтобы задача стала линейной).

3. Численное решение обычно проводится на компьютере. Результат имеет вид не формулы, а числа или таблицы чисел, получаемых в результате выполнения компьютерной программы, реализующей некий алгоритм. Такое решение вычисляется с погрешностью, которая может быть сделана сколь угодно малой.

Не следует путать точность решения с точностью модели в целом. Точность модели определяется в основном ее полнотой. Даже при наличии точного решения самих уравнений точность модели может оказаться недостаточной.

*Аналитическое решение* уравнений модели является предпочтительным, так как явно записанные формулы решения позволяют легко анализировать степень и характер влияния отдельных параметров на поведение системы, выявлять возможность кризисных ситуаций (в таких критических точках функция, выражающая решение, может иметь разрыв, излом или перегиб). Однако аналитическое решение возможно в редких случаях.

Гораздо чаще можно получить *численное решение*. Однако его анализ более сложен. Для определения поведения системы в разных ситуациях приходится каждый раз проводить решение заново, осуществляя так называемый машинный эксперимент. Это увеличивает объем работы.

Приближенное решение часто является результатом компромисса между желанием описать систему явными формулами для облегчения их анализа и невозможностью найти для уравнений модели точное аналитическое решение. В некоторых случаях приближенные решения служат исходными точками для осуществления тех или иных численных алгоритмов (например, процессов последовательных приближений).

Проверка адекватности математических моделей обычно осуществляется путем сравнения результатов моделирования с характеристиками реальной системы. Лучше всего для этого попытаться применить модель к какой-то существующей системе с известными характеристиками.

Для экономико-математических моделей такой способ проверки редко удается применить на практике (в основном для макроэкономических моделей). Часто модель предполагается адекватной просто на основе того, что в ее основе лежат более или менее достоверные гипотезы (выдвинутые на основе изучения систем и ситуаций, имевших место в прошлом) и более или менее точно определенные параметры. Проверка адекватности такой модели осуществляется постфактум по результатам последующего функционирования моделируемой системы. Если оказывается, что модель была неадекватна сложившейся ситуации, а на ее основе были приняты конкретные хозяйственные решения – это может быть чревато для системы более или менее значительным кризисом.

Поэтому в экономико-математическом моделировании особенно важен этап постановки задачи. Если на этом этапе выдвинуты неверные предположения о характере системы и процессов, происходящих в ней – результат может оказаться необратимым и даже катастрофическим.

Математическое моделирование сложных объектов или процессов часто ведется поэтапно: от более простой модели, описывающей лишь небольшую часть поведения оригинала к более сложным моделям, все более полно и адекватно описывающим реалии. Такой подход позволяет понять механизмы происходящих явлений и понять какой фактор и параметр отвечает за ту или иную характеристику явления.

Подводя краткий итог вышесказанному, необходимо отметить, что экономико-математическое моделирование представляет собой в настоящее время практически единственный систематизированный способ увидеть варианты будущего и оценить потенциальные последствия управленческих решений. Практически любой метод принятия таких решений, используемый в управлении и претендующий на объективность и научную обоснованность, можно рассматривать как разновидность моделирования.

Экономико-математическое моделирование, являясь современным методом исследования экономических систем, связано со следующими дисциплинами:

• в методологическом плане — с экономической теорией;

• в методическом отношении — с народнохозяйственным и отрасле-вым планированием, организацией и управлением производством;

• в математическом аспекте — с математическим программированием, достаточно строгие теоретические положения, которого позволяют оптимизировать принимаемые управленческие решения и делать содержательные экономические выводы и обобщения;

• в вычислительном отношении — с алгоритмизацией и программированием для ЭВМ.

Таким образом, использование метода экономико-математического моделирования дает возможность находить истину не методом дорогостоящих «проб и ошибок», а выдавать рекомендации по управлению экономическими системами, опираясь на прочный фундамент научного анализа и предвидения. Работа с моделью, а не с объектом обусловливает оперативное получение подробной и наглядной информации, вскрывающей его внутренние связи, качественные характеристики и количественные параметры.

**1.4. Предварительные сведения об оптимизационных моделях**

Оптимизационные модели направлены на поиск наилучшего варианта решения из некоторого множества возможных решений. Критерием оптимальности в таких моделях служит достижение экстремального (максимального или минимального) значения некоторой величины, зависящей от переменных модели. Такая величина называется ***целевой функцией*** (ЦФ) задачи. Смысл целевой функции зависит от вида и смысла решаемой задачи. В экономических моделях в качестве целевой функции часто выступает прибыль, выручка от реализации выпущенной продукции и т.п. (они в итоге должны оказаться максимальными), или, например, величина производственных издержек (соответственно, в оптимальном случае она должна быть минимальной).

Таким образом, решение задачи *оптимизационного моделирования* (коротко – "задачи оптимизации") сводится к поиску экстремума некоторой функции.

Различают *условные и безусловные задачи оптимизации*. В условных задачах на переменные модели накладываются какие-то ограничения, сужающие область определения целевой функции. Простейшим ограничением является естественное для многих практических задач требование неотрицательности переменных, носящих материальный характер (например, объемов выпуска какой-либо продукции, и т.п.). Возможны и другие ограничения, связанные, например, с ограниченностью материальных или финансовых ресурсов. Такие ограничения всегда имеют вид каких-то равенств или неравенств. В безусловных задачах оптимизации ограничения отсутствуют.

Из этого ясно, что экономические задачи оптимизации, как правило, являются условными.

Задачи оптимизации различаются также:

1. По числу переменных:

а) *одномерные* – целевая функция зависит от одной переменной;

б) *многомерные* (двумерные, трехмерные и т.д.) – целе-вая функция зависит от нескольких переменных.

2. По математической структуре:

а) *линейные* (все математические выражения в задаче имеют вид линейных форм);

б) *нелинейные*.

Многомерные условные линейные задачи оптимизации называются задачами линейного программирования (ЗЛП). Эти задачи будут подробно рассмотрены впоследствии.

В общем виде **задача оптимального управления** может быть сформулирована следующим образом:

Имеется некоторый объект, состояние которого характеризуется двумя видами параметров – параметрами состояния и параметрами управления, причём в зависимости от выбора последних процесс управления объектом протекает тем или иным образом. Качество процесса управления оценивается с помощью некоторого функционала (числовая функция, аргументами которой, как правило, служат другие функции), на основе чего ставится задача: найти такую последовательность значений управляющих параметров, для которой данный функционал принимает экстремальное значение.

С формальной точки зрения многие проблемы оптимального управления могут быть сведены к задачам линейного и нелинейного программирования большой размерности, так как каждой точке пространства состояний соответствует свой вектор неизвестных переменных. Все же, как правило, движение в данном направлении без учета специфики соответствующих задач не приводит к рациональным и эффективным алгоритмам их решения. Поэтому методы решения задач оптимального управления традиционно связаны с другим математическим аппаратом, берущим своё начало от вариационного исчисления и теории интегральных уравнений. *Следует также заметить, что опять-таки в силу исторических причин теория оптимального управления была ориентирована на физические и технические приложения, и её применение для решения экономических задач носит в определенном смысле вторичный характер.* В то же время в целом ряде случаев модели исследования, применяющие аппарат теории оптимального управления, могут привести к содержательным и интересным результатам.

К сказанному выше необходимо добавить замечание о тесной связи, существующей между методами, применяемыми для решения задач оптимального управления, и динамическим программированием. В одних случаях они могут использоваться на альтернативной основе, а в других довольно удачно дополнять друг друга.

В теории оптимального управления для решения задач применяется специфический математический аппарат, основанный на достаточных условиях оптимальности. Это означает, что если утверждаемое условие оптимальности достаточно, то данный управляемый процесс оптимальный. Но это не означает, что не может быть других оптимальных процессов, для которых данное достаточное условие не выполняется. Другими словами, условие  достаточно для выполнения заданного условия , когда



Наиболее эффективным средством отыскания решений являются необходимые и достаточные условия. Найденные достаточные условия оптимальности по своей сути близки и к необходимым.

Для доказательства соответствующих теорем о достаточных условиях оптимальности введем некоторые вспомогательные математические конструкции.

Рассмотрим вспомогательную задачу оптимизации.

Пусть задан функционал

  (1.1)

где - вектор состояния системы;

  - вектор управления.

На векторы  и  наложены условия

**

Требуется отыскать минимальное значение функционала (1.1) при заданных ограничениях.

Эту постановку можно рассматривать как частный вариант задачи оптимального управления в тривиальном случае, когда среди ограничений, определяющих множество  допустимых процессов, отсутствуют уравнения процесса.

В данной задаче нетрудно получить необходимые и достаточные условия, которым должно удовлетворять оптимальное решение , минимизирующее функционал (1.1). Эти условия можно сформулировать в виде теоремы.

**Теорема 2.1.** Для того чтобы процесс  был оптимальный, то есть минимизировал функционал (1.1), необходимо и достаточно, чтобы при всех 

  (1.2)

**Контрольные вопросы**

1. Что такое модель системы?
2. Типы моделей.
3. Роль моделей.
4. Функции моделей
5. Классификация математических моделей.
6. Каковы основные цели, преследуемые при моделировании различных систем?
7. Какие модели называются оптимизационными?
8. Что такое вербальная модель системы?

9. К какому виду моделей относится структурная схема административного устройства организации?

10. В чем состоит разница между теоретическими и эмпирическими моделями?

11. В чем состоит разница между статическими и динамическими моделями?

12. Чем характеризуется полнота модели?

13. Как соотносятся между собой адекватность и точность модели? В каком случае модель с невысокой точностью может считаться адекватной?

14. Что понимается под смешанной (полуэмпирической) моделью системы?

15. Какое действие называется экстраполированием модели? Почему опасно экстраполировать эмпирические модели?

16. Какие действия входят в состав этапа постановки задачи при создании модели системы?

17. Какие действия входят в состав этапа формализации при создании модели системы?

18. Охарактеризуйте понятия точного, приближенного и численного решения математической задачи.

19. Постановка задачи оптимального управления.