2.7.1 Структура и экономико-математическая модель межотраслевого баланса (МОБ)

С теоретической точки зрения **МОБ** представляет собой экономико-математическую модель процесса воспроизводства, которая в развернутом виде отражает ***взаимосвязи отраслей народного хозяйства по производству, распределению, потреблению и накоплению общественного продукта.***

Схема МОБ базируется на предпосылке, что продукция отраслей народного хозяйства по характеру использования может быть разделена на две части: *промежуточный и конечный продукт*. Под *промежуточным продуктом* понимается часть совокупного общественного продукта, расходуемая на покрытие нужд текущего потребления, — так называемое *внутрипроизводственное потребление*. К конечному продукту относится та часть продукции, которая выходит за пределы текущего производственного потребления.

БАЛАНСОВАЯ МОДЕЛЬ ЛЕОНТЬЕВА

Допустим, что в некоторой экономической системе производятся, используются и обращаются N видов продукции. Каждая отрасль системы производит *один продукт*, и каждый продукт производится в отдельной отрасли. Производственный процесс в каждой отрасли использует для производства своего продукта некоторые (а возможно и все) виды производимой в системе продукции, и только их. Характеристики производственных процессов в отраслях предполагаются известными и постоянными, так что модель системы является статической (не учитывается изменение технологии производства вследствие технического прогресса). Кроме того, в ней не учитываются многие другие экономические факторы, такие, как, например, импорт товаров или сырья, использование невоспроизводимых ресурсов, и др.

Валовой выпуск i-го продукта необходимо разделить на две части: ту, которая потребляется отраслями системы на производственные нужды, и ту, которая должна потребляться населением на непроизводственные нужды (конечный спрос на продукт). Обозначим через a_{ij} количество i-продукта, которое используется для производства единицы j-продукта. Тогда общее потребление i-продукта на нужды производства во всех отраслях составляет:

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij}x_j, \quad i = 1,2,\dots,N$$

Чистый выпуск i-продукта составит:

$$x_i - \sum_{j=1}^{N} a_{ij}x_j, \quad i = 1,2,\dots,N$$

Если известен конечный спрос на каждый продукт y_i, то из естественного требования баланса спроса и предложения получается система линейных алгебраических уравнений вида:

$$x_i - \sum_{j=1}^{N} a_{ij}x_j = y_i, \quad i = 1,2,\dots,N \tag{1}$$

называемая моделью Леонтьева (Василий Леонтьев (1905-1999) – американский математик и экономист, лауреат Нобелевской премии по экономике 1973 г.). Систему (1) можно представить в матричной форме

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})\cdot X = Y. \tag{2}$$

Здесь **A** – квадратная матрица затрат, или технологическая матрица, размером N×N с элементами a_{ij} (i, j=1,2,…,N); **I** –единичная матрица размером N×N; X и Y – вектора-столбцы из N элементов каждый, содержащие, соответственно, искомые значения объемов выпуска и заданные значения объемов конечного спроса на отдельные продукты. Решив систему (1), можно определить объемы выпуска каждого вида продукции, необходимые для устойчивого функционирования системы.

Система линейных уравнений, представляющая модель Леонтьева, имеет одно важное ограничение – все ее элементы (коэффициенты затрат a_{ij}, величины конечного спроса y_i и объемы выпуска продукции x_i) должны быть неотрицательными. Однако легко понять, что в общем случае в решении системы линейных уравнений могут иметься отрицательные компоненты даже в том случае, если все ее коэффициенты и свободные члены неотрицательны.

Если все компоненты решения системы (13) неотрицательны, то модель называется ***продуктивной****.*

Определение продуктивности модели является важной задачей исследования модели Леонтьева.

Допустим, что какая-то часть отраслей рассматриваемой экономической системы (ее подсистема) не нуждается для своего функционирования в товарах других отраслей, т.е., осуществляет выпуск своих продуктов, используя только эти же продукты (при этом остальные отрасли для своих производств тоже могут потреблять эти продукты). Такая подсистема называется изолированной. Если в системе имеется изолированная подсистема, то матрицу затрат **A** можно перестановкой строк и/или столбцов (т.е., изменением нумерации отраслей/продуктов) привести к виду

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Здесь A_1 – внутренняя квадратная матрица (подматрица) размером K×K, которая соответствует изолированному подмножеству отраслей (подсистеме). Подматрица, обозначенная через "0" состоит целиком из нулевых элементов, элементы подматриц A_2 и A_3 могут быть любыми. Если никакой перестановкой строк и столбцов матрицу затрат невозможно привести к виду (3), то она называется ***неразложимой***. Это означает, что в экономической системе невозможно выделить какую-либо изолированную подсистему.

Можно доказать, что модель Леонтьева продуктивна, если:

1) матрица затрат неразложима;
2) сумма элементов каждой строки матрицы затрат не превосходит единицы:

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij} \leq 1, \quad i = 1,2,\dots,N$$

3) хотя бы в одной строке эта сумма строго меньше единицы:

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij} < 1, \quad i = i^*$$

Решение системы линейных уравнений (2) позволяет определить объемы выпуска продукции каждой отрасли, которые обеспечивают устойчивое функционирование экономической системы в целом. В матричной форме это решение можно записать

$$X = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \cdot Y. \tag{4}$$

Обратная матрица

$$\mathbf{A}^* = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \tag{5}$$

называется матрицей полных затрат. Ее элементы a_{ij}* показывают, сколько единиц i-продукта требуется, чтобы выпустить единицу j-продукта для удовлетворения конечного спроса (т.е., без учета затрат j-продукта на производственные нужды).

Задача 1. Дана следующая технологическая матрица, описывающая взаимодействие трех секторов некоей экономической системы

$$A = \begin{pmatrix} 0.13 & 0.41 & 0.02 \\ 0.8 & 0.21 & 0.03 \\ 0.21 & 0.41 & 0.1 \end{pmatrix}$$

Коэффициенты матрицы a_{ij} показывают (в условных единицах) расход продукта i-отрасли на выработку единицы продукции j-отрасли. Конечный спрос на продукцию отраслей описывается вектором

$$Y = \begin{pmatrix} 210 \\ 608 \\ 270 \end{pmatrix}$$

Необходимо проверить продуктивность модели и определить валовой выпуск продукции каждой отрасли, коэффициенты полных затрат и объемы межотраслевых поставок продукции.

Модели межотраслевого баланса МОБ

1. Рассмотрим более общую структуру модели межотраслевого баланса МОБ в стоимостном выражении, где потоки продукции измеряются на основе стоимости производственной продукции в некоторых ценах.

В межотраслевом балансе производственная сфера народного хозяйства представлена в виде *n* отраслей. Каждой отрасли при этом соответствуют отдельная строка и отдельный столбец, т. е. каждая отрасль рассматривается в двух плоскостях: с точки зрения распределения ее продукта (по строке) и с точки зрения создания его стоимости (по столбцу) как суммы затрат различных продуктов, расходуемых на его изготовление, а также амортизацию основных фондов, величину заработной платы работников, создающих этот продукт, и величину чистого дохода (прибыль и налог с оборота).

Таблица 1 Исходные данные

j / i		Отрасли производства				Текущее производственное потребление U_i	Конечный продукт V_i	Валовой продукт $W_i = U_i + V_i$
		1	2	…	n			
Отрасли производства	1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1n}	U_1	V_1	W_1
	2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2n}	U_2	V_2	W_2
	…	…	…	…	…	…	…	…
	n	x_{n1}	x_{n2}	…	…	U_n	V_n	W_n
Текущие производственные затраты, T_j		T_1	T_2	…	T_n	$\sum_{j=1}^{n} T_j$ $\sum_{i=1}^{n} U_i$	$\sum_{i=1}^{n} V_i$	$\sum_{i=1}^{n} W_i$
Амортизационные отчисления		γ_1	γ_2	…	γ_n	$\sum_{j=1}^{n} \gamma_j$	Промежуточный	Конечный продукт

Заработная плата	Z_1	Z_2	$\dots$	Z_n	$\sum_{j=1}^{n} Z_j$	продукт (суммарный)	(суммарный)
Прибыль	δ_1	δ_2	$\dots$	δ_n	$\sum_{j=1}^{n} \delta_j$		
Валовой продукт	W_1	W_2	$\dots$	W_n	$\sum_{j=1}^{n} W_j$		Суммарный валовой продукт

В МОБ выделяют четыре основных его раздела (квадранта).

I квадрант. Матрица элементов, стоящих на пересечении (п+1) первых строк и (п+1) первых столбцов.

Каждая величина x_{ij} в этой части МОБ несет двойную смысловую нагрузку: с одной стороны, характеризует текущие производственные затраты продукции i-й отрасли в j-й отрасли (как элемент столбца), с другой (как элемент строки) — выступает в качестве распределительной характеристики. Так, величина x_{45} отражает величину затрат продукции четвертой отрасли на выпуск продукции пятой отрасли (интерпретация по столбцу) и объем поставок из четвертой отрасли в пятую (интерпретация по строке). Строки и столбцы, имеющие одинаковые номера, характеризуют процесс производства (столбец) и распределения (строка) продукции одной и той же отрасли экономики на нужды текущего производственного потребления. Таким образом, здесь отражается внутрипроизводственный оборот (промежуточные затраты и промежуточный выпуск) предметов труда и услуг.

В соответствии с вышесказанным основные балансовые уравнения I-го квадранта МОБ будут иметь следующий вид:

$$U_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}, \forall i,$$

где U_i - сумма всех поставок i-й отрасли другим отраслям.

$$T_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij}, \forall_j,$$

где T_j - сумма текущих производственных затрат *j*-й отрасли.

Вектор-столбец, таким образом, может рассматриваться как описание соответствующего технологического способа.

Промежуточный продукт народного хозяйства

$$\sum_{i=1}^{n} U_i = \sum_{j=1}^{n} T_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}, \forall i, \forall_j$$

это сумма текущего производственного потребления всех отраслей или, что то же самое, сумма текущих производственных затрат по народному хозяйству.

Промежуточный продукт отражает, таким образом, реальный оборот продукции в процессе материального производства, учет которого необходим для планирования процесса воспроизводства в народном хозяйстве страны.

II квадрант МОБ в отраслевой разбивке раскрывает материально-вещественную структуру элементов конечного продукта, т. е. той части совокупного общественного продукта, которая отражает конечный результат процесса общественного воспроизводства. В составе конечного продукта в рамках МОБ обычно выделяются следующие статьи, представленные столбцами II квадранта:

- личное и общественное непроизводственное потребление (содержание государственного аппарата, затраты на оборону, обслуживание населения);
- возмещение выбытия основных фондов;
- накопление основных и оборотных фондов;
- экспортно-импортное сальдо.

Ко второму квадранту МОБ относится также столбец суммарных валовых объемов выпуска продукции отраслями, которые рассчитываются с помощью следующих балансовых уравнений

$$W_i = U_i + V_i, \forall i,$$

т. е. как сумма промежуточного и конечного продуктов отрасли.

В **III квадранте** МОБ в отраслевой разбивке раскрывается стоимостная структура конечного продукта. В том, что в данном квадранте речь действительно идет о стоимостном эквиваленте конечного продукта, легко убедиться, выполнив элементарные преобразования над балансовыми уравнениями

$$W_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + V_i, \forall i$$

и

$$W_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} + l_j, \forall j,$$

где l_j — условно-чистая продукция отрасли, рассчитываемая как сумма амортизационных отчислений, заработной платы и дохода (прибыли) j-й отрасли, т. е.

$$l_j = z_j + \delta_j + \gamma_j, \forall j.$$

Очевидно, что $\sum_{i=1}^{n} W_i = \sum_{j=1}^{n} W_j$, то есть объем валового общественного продукта как сумма распределенной продукции отраслей равен объему общественного продукта как сумме всех производственных затрат. Тогда получим:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij} + V_i \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} x_{ij} + l_j \right),$$

откуда следует

$$\sum_{i=1}^{n} V_i = \sum_{j=1}^{n} l_j.$$

Таким образом, и во II, и в III квадрантах МОБ фигурирует конечный продукт, но если во II квадранте характеризуется структура его потребления, то в третьем квадранте показывается, в каких отраслях народного хозяйства была произведена его стоимость.

Очевидно, что обычно итоги одноименных строк и столбцов должны быть равны между собой, так как общий объем затрат в отрасли (сумма по столбцу) должен быть равен в денежном выражении объему валового выпуска соответствующей отрасли (сумма по строке).

IV квадрант МОБ характеризует перераспределительные отношения в народном хозяйстве, осуществляемые через финансово-кредитную систему. В силу трудностей статистического и методологического характера IV раздел МОБ, как правило, детальной разработки не получает и в большинстве случаев полностью опускается.

Обратим лишь внимание читателя на балансовое соотношение

$$H\ddot{A} = \sum_{i=1}^{n} V_i - \sum_{j=1}^{n} \gamma_j,$$

где $H\ddot{A}$ - национальный доход народного хозяйства;

$\sum_{i=1}^{n} V_i$ - суммарный конечный продукт народного хозяйства;

$\sum_{j=1}^{n} \gamma_j$ - суммарные амортизационные отчисления на возмещение выбытия основных фондов.

2 Коэффициенты технологических и полных затрат

Рассмотренные выше балансовые соотношения включают в себя только объемные показатели. Однако в такой постановке модель МОБ не может быть непосредственно использована в структурном анализе взаимосвязей между отраслями экономики. Такой анализ предполагает расчет коэффициентов прямых затрат $a_{ij} = \frac{x_{ij}}{W_j}$, которые сводятся в соответствующую матрицу $|A|$.

Элементы a_{ij} характеризуют пропорциональный расход продукции i-й отрасли (в рублях) на один рубль продукции j-й отрасли, а матрица технологических коэффициентов в общей форме будет иметь следующий вид:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots a_{nn} \end{vmatrix}_{n*n}$$

Коэффициенты прямых затрат должны рассматриваться с учетом следующего их экономического содержания: чтобы в первой, например, отрасли произвести определенный объем продукции, на один дополнительный рубль этой продукции понадобится:

a_{21} рубля — от второй отрасли;

a_{31} рубля — от третьей отрасли и т. д.

Отсюда со всей очевидностью следует, что $a_{ij} \geq 0$, а также, что $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \leq 1$. Действительно, процесс воспроизводства нельзя было бы осуществить, если бы затрачивалось большее количество продукции для собственного воспроизводства, чем создавалось в результате этого процесса.

Очевидно, что прямые затраты не исчерпывают общих затрат продукции i-й отрасли на единицу продукции j-й отрасли. Так, например, расход электроэнергии на выпуск продукции металлургической отрасли не исчерпывается прямыми затратами электроэнергии. В производстве металла участвует топливо, на получение которого была использована электроэнергия, а также многие другие ингредиенты, производство которых также требует затрат электроэнергии. Все эти затраты должны быть учтены как связанные с выпуском металла. Это так называемые косвенные затраты, которые характеризуют неявные связи в процессе производства того или иного вида продукции.

Отсюда следует, что, только прибавив косвенные затраты к прямым, можно рассчитать так называемые коэффициенты полных затрат на производство единицы продукции соответствующих отраслей.

Таким образом, коэффициент полных затрат (обозначим его b_{ij}) характеризует количество продукции в i-й отрасли для обеспечения выпуска единицы продукции в j-й отрасли.

В большинстве случаев полные затраты существенно превышают прямые затраты, степень превышения при этом связана, очевидно, с характером производства того или иного продукта.

В отдельных случаях это превышение может достигать десятков и даже сотен раз.

Выяснив экономический смысл коэффициентов полных затрат (b_{ij}), зададимся вопросом: а как же эти коэффициенты рассчитывать?

Пример 2. Для получения ответа на данный вопрос, позволяющий также прояснить основную идею использования МОБ в планировании, рассмотрим элементарнейшую модель межотраслевого баланса, включающего в себя данные (в натуральном выражении) по пяти отраслям экономической системы:

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли					
	Ме-тал-	Маши-ностро-	Топлив-ная про-	Сельское хозяй-	Трудо-вые ре-	Общий объем
Металлургия	10	65	10	5	10	100
Машиностроение	40	25	35	75	25	200
Топливная промышленность	15	5	5	5	20	50
Сельское хозяй-	15	10	50	50	525	650
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

Таблица 7.2 Данные по пяти отраслям экономической системы

Так, например, для того чтобы отрасль машиностроения смогла выпустить свою продукцию (200 единиц), она должна использовать:

- 65 единиц продукции металлургии;
- 25 единиц продукции собственной отрасли (внутрипроизводственное потребление);
- 5 единиц топливной промышленности;
- 10 единиц продукции сельского хозяйства;
- 200 единиц трудовых ресурсов.

Представим себе, что в результате увеличения спроса на продукцию машиностроения объем производства этой отрасли должен возрасти на 10%. Это означает, что потребуется увеличение производства всей вышеперечисленной продукции также на 10%. То есть для того, чтобы произвести дополнительные 20 единиц продукции машиностроения, потребуется:

- 6,5 единицы продукции металлургии;
- 2,5 единицы продукции машиностроения;
- 0,5 единицы топливной промышленности;
- 1,0 единица продукции сельского хозяйства;
- 20,0 единицы трудовых ресурсов.

И это только так называемые прямые затраты, на основании которых далее должны быть рассчитаны косвенные затраты. Так, например, 6,5 единицы металлургической отрасли, необходимые для производства 20 дополнительных единиц машиностроения, потребуют 6,5 %-го $\left(\frac{6{,}5}{100}\cdot 100\right)$ увеличения производства продукции, необходимой для производства металла, то есть:

10 * 0,065 = 0,65 единицы продукции металлургии;

40 * 0,065 = 2,6 единицы продукции машиностроения;

15 * 0,065 = 0,975 единицы продукции топливной промышленности;

15 * 0,065 = 0,975 единицы продукции сельского хозяйства;

100 * 0,065 = 6,5 единицы трудовых ресурсов.

Аналогичные расчеты должны быть выполнены и для всех остальных отраслей народного хозяйства рассматриваемого примера. Осуществим расчет косвенных затрат первого цикла в табличной форме.

Отрасли народного хозяйсива	Металлургия	Машиностроение	Топливная промышленность	Сельское хозяйство	Трудовые ресурсы	Косвенные затраты первого цикла
Металлургия	0,65 (10 · 0 0,65)	0,8125 (65 · 0,0125)	0,1 (10 · 0,01)	0,0075 (5 · 0,0015)	0,2 (10 · 0,02)	1,77
Машиностроение	2,6 (40 · 0,065)	0,3125 (25 · 0,0125)	0,35 (35 · 0,01)	0,1125 (75 · 0,0015)	0,5 (25 · 0,02)	3,875
Топливная промышленность	0,975 (15 · 0,065)	0,0625 (5 · 0,0125)	0,05 (5 · 0,01)	0,0075 (5 · 0,0015)	0,4 (20 · 0,02)	1,495
Сельское хозяйство	0,975 (15 · 0,065)	0,125 (10 · 0,0125)	0,5 (50 · 0,01)	0,075 (50 · 0,0015)	10,5 (525 · 0,02)	12,175
Трудовые ресурсы	6,5 (100 · 0,065)	2,5 (200 · 0,0125)	1,0 (100 · 0,01)	0,825 (550 · 0,0015)	1,0 (50 · 0,02)	11,825
Коэффициент роста объемов производства	$\frac{6,6}{100}=0,065$	$\frac{2,5}{200}=0,0125$	$\frac{0,5}{50}=0,01$	$\frac{0,1}{650}=0,0015$	$\frac{20}{1000}=0,02$	–

Таблица 3 Расчеты косвенных затрат первого цикла

Рассчитав косвенные затраты первого цикла, нельзя не обратить внимание на то, что они по некоторым отраслям (машиностроение, топливная промышленность, сельское хозяйство) уже превышают прямые затраты.

В то же время совершенно очевидно, что косвенные затраты первого цикла далеко не исчерпывают всех необходимых косвенных затрат. Поэтому потребуется следующий цикл расчетов, позволяющий вычислить косвенные затраты второго цикла, и т. д. Вообще говоря, процесс нарастания косвенных затрат является бесконечным, однако, учитывая быструю «сходимость» этих расчетов, можно ограничиться тремя-четырьмя циклами.

3 Основное балансовое соотношение модели межотраслевого баланса

Все расчеты по модели межотраслевого баланса осуществляются на основе матрицы коэффициентов прямых затрат

$A = |a_{ij}|$, где $a_{ij} = \frac{x_{ij}}{W_j}$.

Формулу расчетов по модели межотраслевого баланса легко записать в матричном виде. Для этого обозначим:

W — вектор валового выпуска отраслей народного хозяйства;

V— вектор конечного продукта отраслей народного хозяйства.

Тогда, с учетом идеи, проиллюстрированной нами на рассмотренном выше примере, прямые и косвенные затраты в принятых нами обозначениях могут быть рассчитаны следующим образом:

- прямые затраты — AV;
- косвенные затраты первого цикла — $A(A\ V) = A^2V$;
- косвенные затраты второго цикла — $A(A^2V) = A^3V$ и т. д.

Выполненные расчеты имеют следующий смысл.

Вектор AV показывает, какие прямые затраты необходимы для выпуска конечного продукта V. Вектор $A^2V = A(A\ V)$ описывает прямые затраты, необходимые для обеспечения выпуска продукта AV, характеризуя таким образом косвенные затраты первого цикла. Вектор $A^3V = A(A^2V)$ показывает, какие прямые затраты необходимо сделать для запуска продукта A^2V (косвенные затраты второго цикла). И так далее.

Сумма $A^2V + A^3V + \ldots$ показывает косвенные затраты на производство продукции, а сумму $A^2 + A^3 + \ldots$ принято называть матрицей косвенных затрат.

Очевидно, что полные суммарные затраты могут быть рассчитаны по формуле

$$W = \underbrace{\underbrace{V}_{\text{Конечный продукт}}}_{\text{Конечное потребление}} + \underbrace{\underbrace{AV}_{\text{Прямые затраты}} + \underbrace{(A^2V + A^3V + \ldots)}_{\text{Косвенные затраты}}}_{\text{Внутрипроизводственное потребление}}$$

После несложных алгебраических преобразований получим

$$W = (E + A + A^2 + A^3 + \ldots)V = (E - A)^{-1}V,$$

где E - единичная матрица.

$$W = (E - A)^{-1}V^* = BV,$$

где $(E - A)^{-1}$ - матрица коэффициентов полных затрат.

Таким образом, расчеты по модели межотраслевого баланса осуществляются на основе матрицы коэффициентов прямых затрат можно легко рассчитать. Полученные расчеты дают нам возможность проанализировать экономическую систему.