Микроэкономика, пример решения задачи
Производственная функция

Задание 1.

Процесс производства некоторого товара описывается с помощью производственной функции $q = f\left(x_1, x_2\right) = 54 x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{2}{3}}$. *Для плана (2,5) найти первый второй предельные продукты. Дайте экономическую интерпретацию полученным результатам. Выясните, характеризуется ли ПФ той или иной разновидностью эффекта масштаба. Предполагая, что производитель приобретает ресурсы по ценам (2,7) найдите функцию переменных издержек* $C_v\left(q\right)$.

Решение.

Находим предельные продукты.

$$MP_1 = \frac{df\left(x_1, x_2\right)}{dx_1} = \frac{54}{2} x_1^{-\frac{1}{2}} x_2^{\frac{2}{3}} = 27 x_1^{-\frac{1}{2}} x_2^{\frac{2}{3}}$$

$$MP_2 = \frac{df\left(x_1, x_2\right)}{dx_2} = \frac{2 \cdot 54}{3} x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{-\frac{1}{3}} = 36 x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{-\frac{1}{3}}$$

Подставляем численные данные.

$$MP_1\left(2,5\right) = 27 \cdot 2^{-\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{2}{3}} = \frac{27 \cdot \sqrt[3]{5^2}}{\sqrt{2}} = \frac{78,9485}{1,4142} = 55,8 \approx 56\,\textit{ед.}$$

При увеличении продукта x_1 на единицу (с 2 до 3), выпуск товара увеличивается на 56 единиц.

$$MP_2\left(2,5\right) = \frac{36 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt[3]{5}} = \frac{50,9117}{1,70997} = 29,77 \approx 30\,\textit{ед.}$$

При увеличении продукта x_2 на единицу (с 5 до 6), выпуск товара увеличивается на 30 единиц.

Складываем степени переменных в производственной функции:

$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{3+4}{6}=\frac{7}{6}$ больше 1, следовательно, эффект масштаба возрастающий.

Находим функцию переменных издержек.

Функция издержек: $C_v(q)=c_1\cdot q^{\frac{6}{7}}$

Положим производится 1 единица продукта.

$q=54x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{2}{3}}=1$

Издержки составляют: $2x_1+7x_2$.

Необходимо так выбрать соотношение ресурсов, чтобы минимизировать издержки:

$2x_1+7x_2\to\min$

Получаем модель:

$2x_1+7x_2\to\min$

$54x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{2}{3}}=1$

Решаем:

$$2x_1 + 7x_2 \to \min$$

$$x_1^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{54x_2^{\frac{2}{3}}}$$

$$x_1 = \left(\frac{1}{54x_2^{\frac{2}{3}}}\right)^2 = \frac{1}{2916x_2^{\frac{4}{3}}}$$

$$2\frac{1}{2916x_2^{\frac{4}{3}}} + 7x_2 \to \min$$

$$\frac{2}{2187x_2^{\frac{7}{3}}} = 7$$

$$2187x_2^{\frac{7}{3}} = \frac{2}{7}$$

$$x_2 = \left(\frac{2}{7 \cdot 2187}\right)^{\frac{3}{7}} = 0,022$$

$$x_1 = \frac{1}{2916x_2^{\frac{4}{3}}} = 0,056$$

Затраты: $2x_1 + 7x_2 = 0,266$

Функция издержек: $C_v(q) = 0,266q^{\frac{6}{7}}$

Микроэкономика, пример решения задачи
Построение производственной функции Кобба-Дугласа

ЗАДАНИЕ 2.

На основании представленных в таблице ниже данных построить ПФ типа Кобба-Дугласа. Сделать прогноз объема производства отрасли на 2000 год, если планируются увеличение основных фондов на 20% и одновременное уменьшение трудовых ресурсов на 5% относительно предыдущего года. Пусть заданы агрегированные основные показатели некоторой отрасли за четыре года:

Год	Объем производства Y, млн ден. ед.	Основные фонды K, млн ден. ед.	Трудовые ресурсы L, тыс. человек
1993	431	650	91
1994	440	710	93
1995	462	773	94
1996	482	836	95
1997	503	888	95
1998	510	890	95
1999	531	913	96

РЕШЕНИЕ.

Параметры A, α, входящие в функцию Кобба-Дугласа $Y = A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{1-\alpha}$, найдем методом наименьших квадратов по данным этой таблицы. Если обозначить

$$y = \ln\frac{Y}{L}; \quad x = \ln\frac{K}{L}; \quad c = \ln A$$

то функцию Кобба-Дугласа можно переписать в логарифмах в линейном виде:

$$\ln\frac{Y}{L} = \ln A + \alpha \ln\frac{K}{L}$$

или $y = c + \alpha x.$

Коэффициенты регрессии c, α в полученной линейной зависимости находим по следующим формулам:

$$\alpha = \frac{n\sum(x_i y_i) - (\sum x_i)(\sum y_i)}{n\sum(x_i^2) - (\sum x_i)^2}$$

$$c = \frac{1}{n}\sum(y_i) - \alpha \cdot \frac{1}{n}\sum(x_i)$$

Здесь данные по x_i, y_i вводятся из таблицы ниже:

Год	$y = \ln\frac{Y}{L}$	$x = \ln\frac{K}{L}$
1993	1,56	1,97
1994	1,55	2,03
1995	1,59	2,11
1996	1,62	2,17
1997	1,67	2,24
1998	1,68	2,24
1999	1,71	2,25

Составим расчетную таблицу:

Год	y	x	yx	x^2
1993	1,56	1,97	3,06	3,87
1994	1,55	2,03	3,16	4,13

1995 1996 1997 1998 1999	1,59 1,62 1,67 1,68 1,71	2,11 2,17 2,24 2,24 2,25	3,35 3,53 3,73 3,76 3,85	4,44 4,73 5,00 5,01 5,07
$n = 7$	сумма 11,38	 15,01	 24,44	 32,24

$$\alpha = \frac{7 \cdot 24.44 - 11.38 \cdot 15.01}{7 \cdot 32.24 - 15.01^2} \approx 0.529$$

$$c = \frac{1}{7} \cdot 11.38 - 0.529 \cdot \frac{1}{7} \cdot 15.01 \approx 0.493$$

$$A = e^c = e^{0.493} \approx 1.637$$

Функция Кобба-Дугласа имеет вид:

$$Y \approx 1.637 \cdot K^{0.529} \cdot L^{1-0.529} = 1.637 \cdot K^{0.529} \cdot L^{0.471}$$

Сделаем прогноз объема производства отрасли на 2000 год, если планируются увеличение основных фондов на 20% и одновременное уменьшение трудовых ресурсов на 5% относительно предыдущего года.

Новые значения: $K = 913 \cdot 1.2 = 1095.6$; $L = 96 \cdot 0.95 = 91.2$, тогда прогноз объема производства:

$$Y_{2000} \approx 1.801 \cdot 1095.6^{0.502} \cdot 91.2^{0.498} \approx 555.747$$

Микроэкономика, пример решения задачи
Анализ производственной функции Кобба-Дугласа

Задание 3.

Для построенной в самостоятельной работе 4 производственной функции рассчитать предельные производительности, предельные нормы замещения ресурсов в 1993 и 1999 годах, сделать сравнительный экономический анализ. При расчетах предположить, что ресурсы в исследуемом году заданы, объем производства вычисляется.

Решение.

Производственная функция Кобба-Дугласа имеет вид:

$$F \approx 1.637 \cdot K^{0.529} \cdot L^{0.471}$$

Данные по годам:

Год	Объем производства Y, млн ден. ед.	Основные фонды K, млн ден. ед.	Трудовые ресурсы L, тыс. человек
1993	431	650	91
1994	440	710	93
1995	462	773	94
1996	482	836	95
1997	503	888	95
1998	510	890	95
1999	531	913	96

Предельная производительность труда

$$\text{ПП}_L = \frac{\partial F}{\partial L}$$

показывает прирост продукта вследствие дополнительного роста трудовых ресурсов на одну единицу.

$$ПП_L = \frac{\partial F}{\partial L} = 1.637 \cdot K^{0.529} \cdot 0.471 L^{0.471-1} = 0{,}771027 \left(\frac{K}{L}\right)^{0.529}$$

$$ПП_L(1993) = 0{,}771027 \left(\frac{650}{91}\right)^{0.529} \approx 2.182$$

$$ПП_L(1999) = 0{,}771027 \left(\frac{913}{96}\right)^{0.529} \approx 2.538$$

В 1999 году по сравнению с 1993 годом предельная производительность труда выросла, то есть при одинаковом приросте трудовых ресурсов прирост продукта увеличился.

Предельная производительность капиталовложений (фондоотдача)

$$ПП_K = \frac{\partial F}{\partial K}$$

означает прирост произведённого продукта вследствие дополнительного роста капиталовложений на одну единицу.

$$ПП_K = \frac{\partial F}{\partial K} = 1.637 \cdot 0.529 \cdot K^{0.529-1} L^{0.471} = 0{,}865973 \left(\frac{L}{K}\right)^{0.471}$$

$$ПП_K(1993) = 0{,}865973 \left(\frac{91}{650}\right)^{0.471} \approx 0.343$$

$$ПП_K(1999) = 0{,}865973 \left(\frac{96}{913}\right)^{0.471} \approx 0.300$$

В 1999 году по сравнению с 1993 годом предельная производительность труда уменьшилась, то есть при одинаковом приросте капиталовложений ресурсов прирост продукта уменьшился.

Предельная норма замещения трудовых ресурсов на основные фонды

$$ПНЗ_L = -\frac{dK}{dL} = \frac{\frac{\partial F}{\partial L}}{\frac{\partial F}{\partial K}}$$

$$ПНЗ_L(1993)=\frac{\frac{\partial F}{\partial L}(1993)}{\frac{\partial F}{\partial K}(1993)}=\frac{2.182}{0.343}\approx 6.360$$

$$ПНЗ_L(1999)=\frac{\frac{\partial F}{\partial L}(1999)}{\frac{\partial F}{\partial K}(1999)}=\frac{2.538}{0.300}\approx 8.468$$

Предельная норма замещения основных фондов на трудовые ресурсы

$$ПНЗ_K=-\frac{dL}{dK}=\frac{\frac{\partial F}{\partial K}}{\frac{\partial F}{\partial L}}$$

$$ПНЗ_K(1993)=\frac{\frac{\partial F}{\partial K}(1993)}{\frac{\partial F}{\partial L}(1993)}=\frac{0.343}{2.182}\approx 0.157$$

$$ПНЗ_K(1999)=\frac{\frac{\partial F}{\partial K}(1999)}{\frac{\partial F}{\partial L}(1999)}=\frac{0.300}{2.538}\approx 0.118$$

В 1999 году по сравнению с 1993 годом предельная норма замещения трудовых ресурсов на основные фонды увеличилась, а предельная норма замещения основных фондов на трудовые ресурсы, соответственно, уменьшилась.

Микроэкономика, пример решения задачи
Производственная функция.

Индексы, масштаб, эффективность производства

Задание 4.

Пусть ПФ имеет вид $Y = 0.94 \cdot K^{0.4+0.1N} \cdot L^{0.8+0.1N}$. *Для базового года* $K_0 = 650 + 10N$ *млн ден. ед.,* $L_0 = 90 + N$ *тыс. человек. Для отчётного года* $K_1 = 900 + 10N$ *млн ден. ед.,* $L_1 = 120 + N$ *тыс. человек. Подсчитать индексы изменения характеристик, масштаб и экономическую эффективность производства. Дать экономическую интерпретацию.*

Решение.

ПФ имеет вид $Y = 0.94 \cdot K^{1{,}17} \cdot L^{1{,}57}$.

Для базового года $K_0 = 727$ млн ден. ед., $L_0 = 97.7$ тыс. человек.

Для отчётного года $K_1 = 977$ млн ден. ед., $L_1 = 127.7$ тыс. человек

Найдем объемы производства в базовом и отчетном годах:

$$Y_0 = 0.94 \cdot K_0^{1{,}17} \cdot L_0^{1{,}57} = 0.94 \cdot 727^{1{,}17} \cdot 97.7^{1{,}57} \approx 2787774.101$$

$$Y_1 = 0.94 \cdot K_1^{1{,}17} \cdot L_1^{1{,}57} = 0.94 \cdot 977^{1{,}17} \cdot 127.7^{1{,}57} \approx 5998245.016$$

Индексы изменения характеристик:

$$I_Y = \frac{Y_1}{Y_0} = \frac{5998245.016}{2787774.101} \approx 2.152$$

$$I_K = \frac{K_1}{K_0} = \frac{977}{727} \approx 1.344$$

$$I_L = \frac{L_1}{L_0} = \frac{127.7}{97.7} \approx 1.307$$

Проверка: $I_Y = I_K^{1.17} \cdot I_L^{1.57} = 1.344^{1.36} \cdot 1.307^{1.57} \approx 2.152.$ Верно.

Масштаб найдем по формуле:

$$M = I_K^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \cdot I_L^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}},$$

где $\alpha = 1.17,\ \beta = 1.57$

Получаем:

$$M = 1.344^{\frac{1.17}{1.17+1.57}} \cdot 1.307^{\frac{1.57}{1.17+1.57}} \approx 1.323$$

Масштабом определяется экстенсивный фактор роста, то есть увеличение объемов производства за счёт увеличения объёма (масштаба) ресурсов.

Экономическая эффективность производства может быть найдена по формуле:

$$E = \left(\frac{I_Y}{I_K}\right)^{\frac{1.17}{1.17+1.57}} \cdot \left(\frac{I_Y}{I_L}\right)^{\frac{1.17}{1.17+1.57}}$$

$$E = \left(\frac{2.152}{1.344}\right)^{\frac{1.17}{1.17+1.57}} \cdot \left(\frac{2.152}{1.307}\right)^{\frac{1.17}{1.17+1.57}} \approx 1.627$$

Экономическая эффективность определяет интенсивный фактор роста, то есть увеличение объемов производства за счёт увеличения эффективности использования ресурсов.

Индекс роста производства I_Y является произведением экономической эффективности на масштаб производства.

Микроэкономика, пример решения задачи
Производственная функция. Поведение фирмы на рынке

ЗАДАНИЕ 5.

Производственная функция фирмы, выпускающая линолеум, имеет вид

$$Y = 177K^{0.356}L^{0.644}$$

*Здесь [Y] – сотни м*м, [K*] – тыс. ден. ед., [L] – сотня рабочих (сот. р.).*

Стоимость ресурсов $W = 5{,}13$ *тыс. ден. ед./сот. раб.*

q *= 10 тыс. ден. ед./тыс. ден. ед.*

Издержки производства ограничены суммой C = 1770 тыс. ден. ед.

1. *Найти максимальный выпуск продукции, оптимальное количество рабочих и стоимость капитальных фондов.*
2. *Построить график изокванты и изокосты. Отметить оптимальную точку.*
3. *Оценить, как изменится выпуск продукции, если:*

а) увеличить заработную плату на 8%;

б) уменьшить цену на фонды в два раза;

в) ввести дополнительные инвестиции в производство в количестве 57,7 тыс. ден. ед.

РЕШЕНИЕ.

1. Производственная функция имеет вид: $Y = 177K^{0.356}L^{0.644}$ (объем произведенного линолеума в кв.м). Стоимость ресурсов $W = 5.130$ тыс. ден. ед. / сот. рабочих, $q = 10$ тыс. ден. ед./ тыс. ден. ед. Издержки производства ограничены суммой $C = 1770$ тыс. ден. ед.

Найдем максимальный выпуск продукции, оптимальное количество рабочих и стоимость капитальных фондов. Нужно максимизировать выпуск

$$Y = 177K^{0.356}L^{0.644} \to max$$

при ограничениях на издержки

$WL + qK = C,$ то есть $5.130L + 10K = 1770$

Составим функцию Лагранжа:

$$Lag\ (L, K, \lambda) = 177K^{0.356}L^{0.644} - \lambda(5.130L + 10K - 1770)$$

Находим частные производные и приравниваем к нулю. Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Lag}{\partial K} = 0 \\ \dfrac{\partial Lag}{\partial L} = 0 \\ 5.130L + 10K = 1770 \end{cases}$$

$$\frac{\partial Lag}{\partial K} = 177 \cdot 0.356 \cdot K^{0.356-1}L^{0.644} - 10\lambda = 63.012\left(\frac{L}{K}\right)^{0.644} - 10\lambda$$

$$\frac{\partial Lag}{\partial L} = 177 \cdot 0.644 \cdot K^{0.356}L^{0.644-1} - 5.130\lambda = 113.988\left(\frac{K}{L}\right)^{0.356} - 5.130\lambda$$

$$\begin{cases} 63.012\left(\dfrac{L}{K}\right)^{0.644} - 10\lambda = 0 \\ 113.988\left(\dfrac{K}{L}\right)^{0.356} - 5.130\lambda = 0 \\ 5.130L + 10K = 1770 \end{cases}$$

Поиск максимума свелся к решению системы уравнений относительно неизвестных K, L, λ. Решение системы может быть найдено по формулам:

$$K^* = \frac{\alpha C}{q} = \frac{0.356 \cdot 1770}{10} = 63.012$$

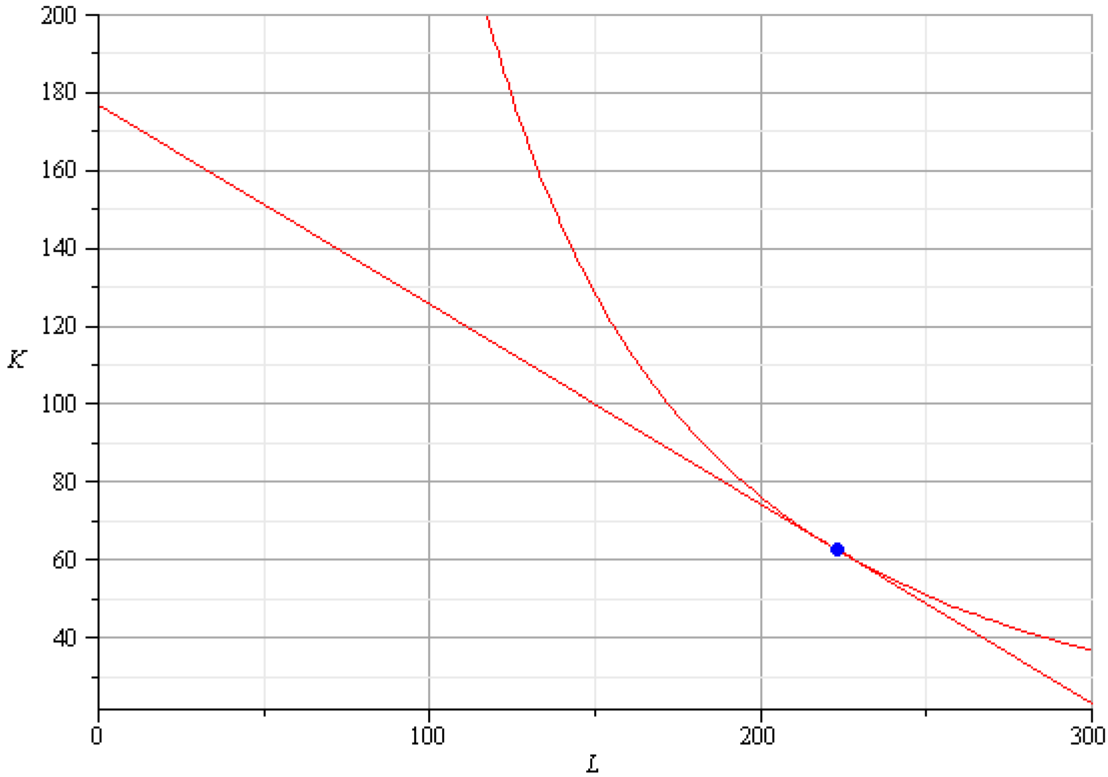
$$L^* = \frac{(1-\alpha)C}{W} = \frac{0.644 \cdot 1770}{5.130} = 222.199$$

Оптимальное количество рабочих $L^* = 222.199$, оптимальная стоимость капитальных фондов: $K^* = 63.012$

Максимальный выпуск тогда равен:

$$Y^* = 177(K^*)^{0.356}(L^*)^{0.644} = 177 \cdot 63.012^{0.356}222.199^{0.644} \approx 25111.326$$

2. Построим изокванту $177 \cdot K^{0.356} L^{0.644} = 25111.326$, изокосту $5.130L + 10K = 1770$ и отметим оптимальную точку (точку касания этих кривых):



3. Оценим, как изменится выпуск продукции, если:

а) увеличить заработную плату на 8%, то есть

$$\Delta w = 0.08 \cdot w = 0.08 \cdot 5.130 = 0.4104$$

Тогда производство изменится (уменьшится) на величину:

$$\Delta Y_w \approx \frac{\partial Y^*}{\partial w} \Delta w = -AC \left(\frac{\alpha}{q}\right)^{\alpha} \left(\frac{1-\alpha}{w}\right)^{2-\alpha} \Delta w =$$

$$= -177 \cdot 1770 \cdot \left(\frac{0.356}{10}\right)^{0.356} \cdot \left(\frac{0.644}{5.130}\right)^{1.644} \cdot 0.4104 = -1293.736$$

б) уменьшить цену на фонды в два раза, то есть

$$\Delta q = -\frac{q}{2} = -5$$

Тогда производство изменится (вырастет) на величину:

$$\Delta Y_q \approx \frac{\partial Y^*}{\partial q}\Delta q = -AC\left(\frac{\alpha}{q}\right)^{\alpha+1}\left(\frac{1-\alpha}{w}\right)^{1-\alpha}\Delta q =$$

$$= -177\cdot 1770\cdot\left(\frac{0.356}{10}\right)^{1.356}\cdot\left(\frac{0.644}{5.130}\right)^{0.644}\cdot(-5) = 4469.816$$

в) ввести дополнительные инвестиции в производство в количестве $(50 + N)$ тыс. ден. ед., то есть

$$\Delta C = 57.7$$

Тогда производство изменится (вырастет) на величину:

$$\Delta Y_C \approx \frac{\partial Y^*}{\partial C}\Delta C = A\left(\frac{\alpha}{q}\right)^{\alpha}\left(\frac{1-\alpha}{w}\right)^{1-\alpha}\Delta C =$$

$$= 177\cdot\left(\frac{0.356}{10}\right)^{0.356}\cdot\left(\frac{0.644}{5.130}\right)^{0.644}\cdot 57.7 = 818.601$$

Микроэкономика, пример решения задачи
Функция Кобба-Дугласа. Объем продукции

ЗАДАНИЕ 6.

Найти объем продукции, произведенной за период $[0; T]$, *если функция Кобба-Дугласа имеет вид:*

$$f(t) = (\alpha + \beta t)e^{\gamma t}$$

$$\beta = n; \;\; \alpha = \beta N; \;\; T = N; \; \gamma = \frac{T}{2}$$

РЕШЕНИЕ.

Согласно данным варианта, $n = 7, N = 52$, тогда $\beta = 7$; $\alpha = 364$; $T = 52$; $\gamma = \frac{1}{104}$

$$f(t) = (364 + 7t)e^{\frac{1}{104}t}$$

Составим определенный интеграл

$$q = \int_0^{53} (364 + 7t)e^{\frac{1}{104}t}dt$$

который при заданной функции Кобба-Дугласа описывает объем продукции, выпущенной за период $[0; T] = [0; 52]$

Для вычисления интеграла воспользуемся методом интегрирования по частям:

$$q = \int_0^{52} (364 + 7t)e^{\frac{1}{104}t}dt$$

$$= \left| \begin{matrix} u = 364 + 7t & dv = e^{\frac{1}{104}t}dt \\ du = (364 + 7t)'dt = 7dt & v = \int e^{\frac{1}{104}t}dt = 104e^{\frac{1}{104}t} \end{matrix} \right| =$$

$$= 104e^{\frac{1}{104}t}(364 + 7t) \Bigg|_0^{52} - \int_0^{52} 7 \cdot 104e^{\frac{1}{104}t}dt$$

$$= 104e^{\frac{1}{104}t}(364 + 7t) \Bigg|_0^{52} - 7 \cdot 104^2 e^{\frac{1}{104}t} \Bigg|_0^{52} =$$

$$= 104e^{\frac{1}{104}t}(364 + 7t - 7 \cdot 104) \Bigg|_0^{52}$$

$$= 104e^{\frac{1}{104} \cdot 52}(364 + 7 \cdot 52 - 728) - 104e^0(364 - 7 \cdot 104) =$$

$$= -104 \cdot (-364) = 37856$$

Ответ. $q = 37856$

Микроэкономика, пример решения задачи
Функция Кобба-Дугласа. Максимальный выпуск продукции

ЗАДАНИЕ 7.

1. Выпуск продукции фирмой описывается функцией Кобба-Дугласа $Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$. Ставка заработной платы равна p_L, норма процента на используемый капитал - p_K.
2. По заданному уровню выпуска продукции Y определить объемы факторов K и L, при которых общие издержки будут минимальны, и величину этих издержек.
3. По известной величине общих издержек TC определить объем факторов K и L, обеспечивающие максимальный выпуск продукции, и соответствующий объем выпуска.

Данные: $A = 0,7,\ \alpha = 0,5,\ p_K = 7,5,\ p_L = 29,\ Y = 60,\ TC = 300$

РЕШЕНИЕ.

По условию, выпуск продукции фирмой описывается функцией Кобба-Дугласа $Y = 0,7 \cdot K^{0,5} \cdot L^{0,5}$. Ставка заработной платы равна $p_L = 29$, норма процента на используемый капитал - $p_K = 7,5$.
Общие издержки $TC = p_K K + p_L L = 7,5K + 29L$.

По заданному уровню выпуска продукции $Y = 60$ определим объемы факторов K и L, при которых общие издержки будут минимальны, и величину этих издержек.

Получаем следующую задачу минимизации:

$$F = 29L + 7,5K \to \min,$$
$$0,7 \cdot K^{0,5} \cdot L^{0,5} = 60,$$
$$K, L \geq 0.$$

Это нелинейная задача, решаем ее методом множителей Лагранжа. Вводим функцию Лагранжа:

$$\Lambda = 29L + 7,5K - \lambda\left(0,7 \cdot K^{0,5} \cdot L^{0,5} - 60\right).$$

Вычисляем ее частные производные по K, L, λ и приравниваем к нулю. Получаем:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Lambda}{\partial L} = 29 - \lambda \cdot 0,7 \cdot 0,5 L^{-0,5} K^{0,5} = 0, \\ \dfrac{\partial \Lambda}{\partial K} = 7,5 - \lambda \cdot 0,7 \cdot 0,5 K^{-0,5} L^{0,5} = 0, \\ \dfrac{\partial \Lambda}{\partial \lambda} = 0,7 \cdot K^{0,5} \cdot L^{0,5} - 60 = 0. \end{cases}$$

Решаем полученную систему:

$$\begin{cases} \lambda \cdot 0,35 (L/K)^{-0,5} = 29, \\ \lambda \cdot 0,35 (K/L)^{-0,5} = 7,5, \\ 0,7 K^{0,5} \cdot L^{0,5} = 60. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda = \dfrac{29}{0,35} (L/K)^{0,5}, \\ \lambda = \dfrac{7,5}{0,35} (K/L)^{0,5}, \\ K^{0,5} \cdot L^{0,5} = \dfrac{60}{0,7}. \end{cases}$$

Получаем:

$$\begin{cases} 29 (L/K)^{0,5} = 7,5 (K/L)^{0,5}, \\ \lambda = \dfrac{7,5}{0,35} (K/L)^{0,5}, \\ K^{0,5} \cdot L^{0,5} = \dfrac{60}{0,7}. \end{cases}$$

Решим уравнение:

$$(L/K)^{0,5+0,5} = \frac{7,5}{29},$$

$$L = \frac{75}{290} K.$$

Подставляем в последнее уравнение

$$K^{0,5} \cdot \left(\frac{75}{290} K \right)^{0,5} = \frac{60}{0,7},$$

$$K \approx 168,55.$$

Тогда $L = \dfrac{75}{290} 168,55 \approx 43,59$.

Величина издержек будет равна $F = 29L + 7,5K = 29 \cdot 43,59 + 7,5 \cdot 168,55 = 2528,208$.

По известной величине общих издержек TC определим объем факторов K и L, обеспечивающие максимальный выпуск продукции, и соответствующий объем выпуска.

Получаем задачу максимизации:

$$F = 0,7 \cdot K^{0,5} \cdot L^{0,5} \to \max,$$
$$29L + 7,5K = 300,$$
$$K, L \ge 0.$$

Это нелинейная задача, решаем ее методом множителей Лагранжа. Вводим функцию Лагранжа:

$$\Lambda = 0,7 \cdot K^{0,5} \cdot L^{0,5} - \lambda\left(29L + 7,5K - 300\right).$$

Вычисляем ее частные производные по K, L, λ и приравниваем к нулю. Получаем:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Lambda}{\partial L} = 0,7 \cdot 0,5 L^{-0,5} K^{0,5} - 29\lambda = 0, \\ \dfrac{\partial \Lambda}{\partial K} = 0,7 \cdot 0,5 K^{-0,5} L^{0,5} - 7,5\lambda = 0, \\ \dfrac{\partial \Lambda}{\partial \lambda} = 29L + 7,5K - 300 = 0. \end{cases}$$

Решаем полученную систему:

$$\begin{cases} 0,35\left(K/L\right)^{0,5} = 29\lambda, \\ 0,35\left(K/L\right)^{-0,5} = 7,5\lambda, \\ 29L + 7,5K - 300 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{0,35}{29}\left(K/L\right)^{0,5} = \dfrac{0,35}{7,5}\left(K/L\right)^{-0,5}, \\ 0,35\left(K/L\right)^{-0,5} = 7,5\lambda, \\ 29L + 7,5K - 300 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(K/L\right) = \dfrac{0,35}{7,5}\left(\dfrac{0,35}{29}\right)^{-1}, \\ 0,35\left(K/L\right)^{-0,5} = 7,5\lambda, \\ 29L + 7,5K - 300 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} K = 3,867L, \\ 0,35\left(K/L\right)^{-0,5} = 7,5\lambda, \\ 29L + 7,5 \cdot 3,867L - 300 = 0. \end{cases}$$

Получаем решение:

$$\begin{cases} K = 20, \\ L = 5,172. \end{cases}$$

При этом максимальный выпуск продукции равен: $F = 0,7 \cdot 20^{0,5} \cdot 5,172^{0,5} \approx 7,12$

Микроэкономика, пример решения задачи
Построение функции Кобба-Дугласа

ЗАДАНИЕ.

На основании следующих данных построить производственную функцию Кобба-Дугласа.

Год	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996
Yi	246	258	264	280	294	309	317	334	351	377
Ki	466	508	553	597	642	690	741	792	847	903
Li	63,9	64,8	65,8	66,6	67,4	68,2	68,8	69,1	69,8	70,3

Здесь Y_i - производственный национальный доход (млрд. руб.), K_i - среднегодовые основные производственные фонды (млрд. руб.), L_i - среднегодовая численность занятых в материальном производстве (млн. чел.). Имеется прогноз на 1997 год: основных производственных фондов $K_{1996}\cdot 1,0N$ млн. руб. и трудовых ресурсов $L_{1996}\cdot 1,0N$, где $N=01,02,...,30$ (номер) млн. чел. На основании полученной производственной функции сделать точечный прогноз национального дохода на 1997 год.

РЕШЕНИЕ.

Производственная функция Кобба-Дугласа имеет вид $Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$, где K - затраты капитала, L - затраты труда, A,α - параметры. Поделив это равенство на L, положив $y=\frac{Y}{L}$, $k=\frac{K}{L}$, прологарифмировав обе части, получим $\ln y = \ln A + \alpha \ln k$.

Определим параметры A, α из этого равенства с помощью линейного регрессионного анализа. Сначала приведем данные к переменным $y = \frac{Y}{L}$, $k = \frac{K}{L}$, поделив на L соответствующие столбцы.

	y_i	$\ln y_i$	k_i	$\ln k_i$	$\ln^2 k_i$	$\ln y_i \cdot \ln k_i$
	3,8498	1,3480	7,2926	1,9869	3,9476	2,6783
	3,9815	1,3817	7,8395	2,0592	4,2402	2,8451
	4,0122	1,3893	8,4043	2,1287	4,5315	2,9575
	4,2042	1,4361	8,9640	2,1932	4,8102	3,1496
	4,3620	1,4729	9,5252	2,2539	5,0803	3,3199
	4,5308	1,5109	10,1173	2,3142	5,3557	3,4966
	4,6076	1,5277	10,7703	2,3768	5,6492	3,6310
	4,8336	1,5756	11,4616	2,4390	5,9488	3,8429
	5,0287	1,6152	12,1347	2,4961	6,2303	4,0315
	5,3627	1,6795	12,8450	2,5530	6,5176	4,2876
Сумма	**44,7729**	**14,9368**	**99,3545**	**22,8010**	**52,3114**	**34,2401**
Среднее	**4,4773**	**1,4937**	**9,9355**	**2,2801**	**5,2311**	**3,4240**
	$\overline{y}$	$\overline{\ln y}$	$\overline{k}$	$\overline{\ln k}$	$\overline{\ln^2 k}$	$\overline{\ln y \cdot \ln k}$

Составим систему:

$$\begin{cases} \ln A + 2,2801 \cdot \alpha = 1,4937 \\ 2,2801 \cdot \ln A + 5,2311 = 3,4240 \end{cases}$$

Определим коэффициенты:

$$\alpha = \frac{\overline{\ln y} \cdot \overline{\ln k} - \overline{\ln y \cdot \ln k}}{(\overline{\ln k})^2 - \overline{\ln^2 k}} = 0,566$$

$$\ln A = \overline{\ln y} - \overline{\ln k} \cdot \alpha = 0,204$$

$$A = e^{0,204} = 1,226$$

Запишем функцию в виде $Y = 1,226 \cdot K^{0,566} \cdot L^{0,434}$

На основании полученной производственной функции сделаем точечный прогноз национального дохода на 1997 год. Вычислим:

$K_{1997} = K_{1996} \cdot 1,013 = 903 \cdot 1,013 = 914,739$ млн. руб.

$L_{1997} = L_{1996} \cdot 1,013 = 70,3 \cdot 1,013 = 71,2139$, млн. чел.

Подставляем:

$Y_{1997} = 1,226 \cdot 914,739^{0,566} \cdot 71,2139^{0,434} = 370,088$

Микроэкономика, пример решения задачи
Производственная функция. Коэффициенты эластичности

ЗАДАНИЕ 9.

Производственная функция задается формулой $Q = 150K^{0,9}L^{0,5}$, где Q - выпуск, K – капитал, L - труд.

Найти:

а) Предельные продукты труда и капитала при K=16, L=125.

б) Коэффициенты эластичности выпуска по труду и капиталу и объяснить их экономический смысл для полученных значений.

РЕШЕНИЕ.

а) предельный продукт труда MQ_L– это прирост объема производства от каждой последующей единицы труда.

$$MQ_L = \frac{dQ}{dL} = 150 \cdot 0,5K^{0,9}L^{-0,5} = \frac{75K^{0,9}}{\sqrt{L}}$$

При K=16, L=125

$$MQ_L = \frac{75K^{0,9}}{\sqrt{L}} = \frac{75 \cdot 16^{0,9}}{\sqrt{125}} = \frac{75 \cdot \sqrt[10]{16^9}}{\sqrt{5 \cdot 25}} = \frac{75 \cdot \sqrt[10]{(2^4)^9}}{5\sqrt{5}} = \frac{15 \cdot \sqrt[10]{2^{36}}}{\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{15 \cdot \sqrt[10]{2^{30}} \cdot \sqrt[10]{2^6}}{\sqrt{5}} = \frac{15 \cdot 2^3 \cdot \sqrt[5]{2^3}}{\sqrt{5}} = \frac{15 \cdot 8 \cdot \sqrt[5]{8}}{\sqrt{5}} = \frac{120\sqrt[5]{8}}{\sqrt{5}} \approx 81,342.$$

Предельный продукт капитала MQ_K:

$$MQ_K = \frac{dQ}{dK} = 150 \cdot 0,9K^{-0,1}L^{0,5} = 135 \cdot \frac{\sqrt{L}}{\sqrt[10]{K}} = 135 \cdot \frac{\sqrt{125}}{\sqrt[10]{16}} = 135 \cdot \frac{\sqrt{5 \cdot 25}}{\sqrt[10]{2^4}} =$$

$$= 135 \cdot \frac{5\sqrt{5}}{\sqrt[5]{2^2}} = 135 \cdot \frac{5\sqrt{5}}{\sqrt[5]{2^2}} = \frac{675\sqrt{5}}{\sqrt[5]{4}} \approx 1143,9.$$

Т.к. частные производные положительны, увеличение любого вида затрат не приводит к уменьшению выпуска.

б) Коэффициенты эластичности выпуска по капиталу и труду для производствен-ной функции Q = 150$K^{0,9}L^{0,5}$ равны, соответственно, α = 0,9, β=0,5, т.к.

$$E_K(Q)=\frac{\frac{dQ}{dK}}{\frac{Q}{K}}=\frac{150\cdot 0,9K^{-0,1}L^{0,5}}{\frac{150K^{0,9}L^{0,5}}{K}}=\frac{0,9K^{-0,1}L^{0,5}}{K^{0,9-1}L^{0,5}}=0,9\frac{K^{-0,1}L^{0,5}}{K^{-0,1}L^{0,5}}=0,9=\alpha;$$

$$E_L(Q)=\frac{\frac{dQ}{dL}}{\frac{Q}{L}}=\frac{150\cdot 0,5K^{0,9}L^{-0,5}}{\frac{150K^{0,9}L^{0,5}}{L}}=\frac{0,5K^{0,9}L^{-0,5}}{K^{0,9}L^{0,5-1}}=0,5\frac{K^{0,9}L^{-0,5}}{K^{0,9}L^{-0,5}}=0,5=\beta.$$

Т.к. α = 0,9, то увеличение затрат капитала на 1% приведёт к увеличению выпуска на 0,9%.

Т.к. β = 0,5, то увеличение затрат труда на 1% увеличивает объем производства на 0,5%.

Т.к. α + β = 0,9+0,5 = 1,4>1, производственная функция непропорционально возрастает. Имеет место растущая эффективность факторов производства. Это означает, что если *K* и *L* увеличиваются в некоторой пропорции, то *Q* растет в большей пропорции.

В соответствии с допущением о конкурентности рынков факторов производства α и β можно рассматривать в качестве прогнозируемых долей дохода, полученного, соответственно, за счет капитала и труда. Если рынок труда имеет конкурентный характер, то ставка заработной платы (*w*) будет равна предельному продукту труда:

$$w=MQ_L=\frac{dQ}{dL}=\frac{\beta Q}{L}=81,342.$$

Следовательно, общая сумма заработной платы (*wL*) будет равна βQ, а доля труда в общем выпуске продукции (*wL/Q*) составит постоянную величину β=0,5. Аналогичным образом норма прибыли выражается через *dQ/dK*:

$\rho = MQ_K = \frac{dQ}{dK} = \frac{\alpha Q}{K} = 1143{,}9$ и, следовательно, общая прибыль (ρK) будет равна αQ,

а доля прибыли ($\rho K/Q$) будет постоянной величиной α=0,9.

Микроэкономика, пример решения задачи
Производственная функция

ЗАДАНИЕ 10.

Производственная функция фирмы имеет вид: $Q = K^{0,5}xL^{0,5}$. Предположим, что в день затрачивается 4 часа труда (L = 4) и 4 часа работы машин (К = 4).

Определить:

1) максимальное количество выпускаемой продукции;

2) средний продукт труда;

3) допустим, что фирма увеличила затраты обоих факторов в два раза. Каков будет объем выпускаемой продукции?

РЕШЕНИЕ.

1) Максимальное количество выпускаемой продукции достигается при максимальном использовании обеих производственных факторов:

$Qmax = 4^{0,5}x4^{0,5} = 4$.

2) Средний продукт труда – ATL = Q/L = 4/4 = 1.0

3) допустим, что фирма увеличила затраты обоих факторов в два раза. Тогда объем выпускаемой продукции будет:

$Qmax = 8^{0,5}x8^{0,5} = 8$.

То есть он также увеличится в 2 раза. Это единичная отдача от масштаба производства – производство вырастает во столько же раз, во сколько вырастает количество использованных ресурсов.

Микроэкономика, пример решения задачи
Производственная функция. Замена ресурсов

Задание 11.

Производственная функция коммерческого предприятия имеет вид $f(x_1, x_2) = 10\sqrt{x_1} \cdot \sqrt{x_2}$ *, где* f *- товарооборот, тыс. руб.;* x_1 *- производственная площадь,* $м^2$*;* x_2 *- численность работников, сотни человек. Рассмотрите изокванту уровня* $y_0 = \sqrt{100+\delta}$ *и найдите точку* C_1 *с координатами* $(\overline{x_1}, \overline{x_2})$*, где* $\overline{x_1} = \dfrac{\delta - 100}{100}$*, и точку* C_2 *с координатами* $(\overline{x_1}', \overline{x_2}')$*, где* $\overline{x_2}' = \dfrac{\delta - 300}{100}$*. Сделайте вывод о возможности замены ресурсов* $(\overline{x_1}, \overline{x_2})$ *и* $(\overline{x_1}', \overline{x_2}')$*. Полученные результаты изобразите графически.*

Решение.

Рассмотрим изокванту уровня $y_0 = \sqrt{100+\delta} = \sqrt{100+522} \approx 24,94$, то есть $f(x_1, x_2) = 10\sqrt{x_1} \cdot \sqrt{x_2} = y_0 = 24,94$, откуда

$$10\sqrt{x_1} \cdot \sqrt{x_2} = 24,94,$$
$$\sqrt{x_1} \cdot \sqrt{x_2} = 2,494,$$
$$x_1 \cdot x_2 = 6,22,$$
$$x_2 = \frac{6,22}{x_1}.$$

Таким образом, уравнение изокванты имеет вид $x_2 = \dfrac{6,22}{x_1}$, это гипербола, она описывает обратно пропорциональную зависимость.

Найдем точку C_1 с координатами $(\overline{x_1}, \overline{x_2})$, где $\overline{x_1} = \frac{\delta - 100}{100} = \frac{522-100}{100} = 4,22$,

поэтому $\overline{x_2} = \frac{6,22}{\overline{x_1}} = \frac{6,22}{4,22} \approx 1,474$. Получили точку $C_1(4,22;\ 1,474)$.

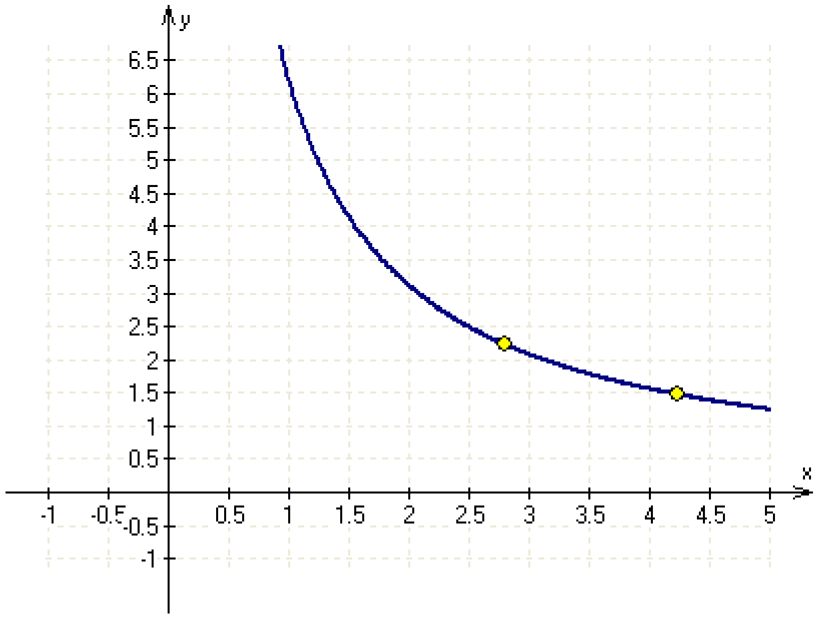
Найдем точку C_2 с координатами $(\overline{x_1}', \overline{x_2}')$, где $\overline{x_2}' = \frac{\delta - 300}{100} = \frac{522-300}{100} = 2,22$,

поэтому .

$\overline{x_1}' = \frac{6,22}{\overline{x_2}'} = \frac{6,22}{2,22} \approx 2,802$. Получили точку $C_2(2,802;\ 2,22)$.

Поскольку точки $C_1(4,22;\ 1,474)$ и $C_2(2,802;\ 2,22)$ расположены на одной изокванте, значение производственной функции (товарооборот) в этих точках одинаково, поэтому данные наборы ресурсов взаимозаменяемы. Определить, какой набор более выгоден можно в условиях реальной экономической ситуации.

Изобразим данные графически:



На графике изображена изокванта функции товарооборота, соответствующая значению товарооборота 24,94 тыс. руб. Товарооборот зависит от двух параметров (переменных): x_1 - производственная площадь, м^2; x_2 - численность работников, сотни человек, которые отложены по оси абсцисс и ординат соответственно. Существует бесконечное число комбинаций площадь и численности работников, при которых товарооборот сохраняется (см. кривую), причем существует гиперболическая зависимость: чем больше площадь, тем меньше требуется работников и наоборот, чем больше работников, тем меньше требуется площадь производственных помещений.

На графике (на изокванте) отмечены две точки, соответствующие рассмотренным в задаче комбинациям: $C_1(4,22;\ 1,474)$ и $C_2(2,802;\ 2,22)$.

Микроэкономика, пример решения задачи
Производственная функция Кобба-Дугласа

ЗАДАНИЕ 12.

Задана производственная функция Кобба-Дугласа $f(x_1, x_2) = 12x_1^{1/2}x_2^{1/3}$

Изобразить изокванту, соответствующую плану (36,27). Какое количество продукта выпускается при этом плане?

Найти первый, второй предельные продукты для плана (36,27) и дать экономическую интерпретацию полученным результатам.

Каким эффектом от расширения масштабов производства характеризуется производственная функция

Каковы затраты производителя на покупку ресурсов при плане производства (36,27) и заданном векторе цен на ресурсы (3,4)?

Найти самый дешевый (оптимальный) план по ресурсам, обеспечивающий выпуск такого же количества продукции, что и для плана (36,27). Найти аналитически решение этой задачи

методом Лагранжа

методом подстановки.

Сделать геометрическую иллюстрацию решения задачи, изобразив ОДР и целевую функцию линиями уровня.

РЕШЕНИЕ.

Для начала выясним, какое количество продукта получается при плане (36,27). Для этого подставим в ПФ значения $x_1^0 = 36$ и $x_2^0 = 27$.

Получим

$f(36, 27) = 12*(36)^{1/2}(27)^{1/3} = 216$ ед.

Построим *изокванту* – уровень производственной функции. Изоквантой называется множество планов производства, дающих одинаковый объем выпускаемой продукции.

Затраты первого и второго ресурсов для всех планов производства, обеспечивающих выпуск 216 единиц продукции, связаны уравнением:

$$12x_1^{1/2}x_2^{1/3} = 216$$

Отсюда

$$x_1^{1/2} = \frac{216}{12x_2^{1/3}} \Rightarrow x_1 = \frac{324}{x_2^{2/3}}$$

Графиком полученной функции в пространстве ресурсов является изокванта, соответствующая выпуску 216 единиц продукции.

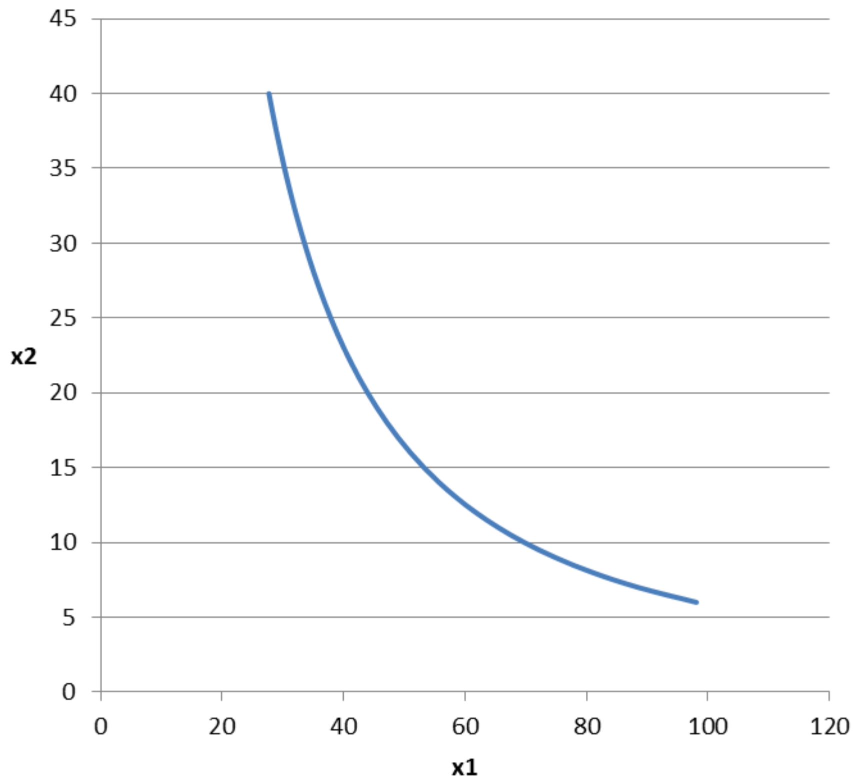


Рис. 1. Изокванта

Затраты на покупку ресурсов при данном плане составят:

$$x_1^0 w_1 + x_2^0 w_2 = 36*3 + 27*4 = 216 \text{ д.е.}$$

Вычислим первый и второй предельный продукты для плана (36,27) – это частные производные ПФ:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=12*\frac{1}{2x_1^{1/2}}*x_2^{1/3}\Big|_{(36,27)}=12*\frac{3}{2*6}=3$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}=12*\frac{1}{3x_2^{3/2}}*x_1^{1/2}\Big|_{(36,27)}=12*\frac{6}{3*3}=8$$

Экономический смысл частных производных ПФ

Предельный продукт первого ресурса при данном плане равен 3, это означает, что при увеличении затрат первого ресурса на единицу и неизменных затратах второго выпуск продукции увеличится примерно на 3 ед.

Предельный продукт второго ресурса при данном плане равен 8, это означает, что при увеличении затрат второго ресурса на единицу и неизменных затратах первого выпуск продукции увеличится примерно на 8 ед.

Решим задачу условной оптимизации аналитическими методами.

$$G(x)=3x_1+4x_2\to\min,\ 12x_1^{1/2}x_2^{1/3}=216$$

Решение методом подстановки.

Допустимое множество задачи, определяемое уравнением связи

$$f(x)=12x_1^{1/2}x_2^{1/3}-216=0$$

представляет собой неограниченную кривую, график которой приведен выше. Вопрос о существовании решения задачи остается открытым.

Выразим из уравнения связи переменную x_1:

$$12x_1^{1/2}x_2^{1/3}=216$$

$$x_1^{1/2}=\frac{18}{x_2^{1/3}}$$

$$x_1=\frac{324}{x_2^{2/3}}$$

Подставим ее в функцию G(x):

$$G(x_2)=3*\frac{324}{x_2^{2/3}}+4x_2 \to \min,\ x_2>0$$

Получилась функция от одной переменной, для которой мы должны найти наименьшее значение на (0, ∞).

Вычислим производную: $G'(x_2)=-\frac{648}{x_2^{5/3}}+4$

Легко видеть, что G имеет единственную критическую точку $x_2^*=162^{3/5}$.

Вычислим вторую производную функции: $G''(x_2)=\frac{1080}{x_2^{8/3}}$

Так как $G''(x_2)$ > 0, точка x_2^*– локальный минимум. Более того, поскольку $G''(x_2)$ > 0 для всех x_2> 0, точка x_2^*– глобальный минимум в силу выпуклости функции.

Глобальный минимум x_2^* порождает глобальный минимум исходной задачи $(x_1^*;x_2^*)$, причем значение может быть получено из уравнения связи:

$$x_1^*=\frac{324}{x_2^{2/3}}=\frac{324}{\left(162^{3/5}\right)^{2/3}}=\frac{324}{162^{2/5}}$$

Наименьшие затраты на ресурсы при данном оптимальном плане производства составят

$$G(x_1^*;x_2^*)=3*\frac{324}{162^{2/5}}+4*162^{3/5}\approx 211.69 \text{ д.е.}$$

Решение методом Лагранжа.

Составим функцию Лагранжа:

$$L=3x_1+4x_2-\lambda\left(12x_1^{1/2}x_2^{1/3}-216\right)$$

Найдем критические точки функции Лагранжа, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} L'_{x1} = 3 - 6\dfrac{\lambda x_2^{1/3}}{x_1^{1/2}} = 0 \\ L'_{x2} = 4 - 3\dfrac{\lambda x_1^{1/2}}{x_2^{2/3}} = 0 \\ L'_{\lambda} = -12 x_1^{1/2} x_2^{1/3} + 216 = 0 \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{324}{x_2^{2/3}}$$

$$\begin{cases} 3 - 6\dfrac{\lambda x_2^{1/3}}{\left(\dfrac{324}{x_2^{2/3}}\right)^{1/2}} = 0 \\ 4 - 3\dfrac{\lambda \left(\dfrac{324}{x_2^{2/3}}\right)^{1/2}}{x_2^{2/3}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 - \dfrac{\lambda x_2^{2/3}}{3} = 0 \\ 4 - \dfrac{54\lambda}{x_2} = 0 \end{cases}$$

Решая систему, получим единственную критическую точку функции Лагранжа $\left(x_1^*; x_2^*; \lambda\right) = \left(\dfrac{324}{162^{2/5}}; 162^{3/5}; \dfrac{2}{27}162^{3/5}\right)$, которая порождает критическую точку исходной задачи $\left(x_1^*; x_2^*\right)$.

$$G\left(x_1^*; x_2^*\right) = 3 * \frac{324}{162^{2/5}} + 4 * 162^{3/5} \approx 211.69 \text{ д.е.}$$

Микроэкономика, пример решения задачи
Производственная функция Кобба-Дугласа

ЗАДАНИЕ 13.

Исходные данные. Фирма, производящая продукцию при заданной рынком системе цен по технологии, отображающейся производственной функцией $Q = 20L^{0,5}$*, может продавать любой объем своей продукции по цене* $P = 6$*. Фирма может использовать любое количество труда по цене* $w = 40$*.*

1. *Какой тип производственной функции представлен в задании? В чем ее особенность? Приведите пример подобного производства. Изобразите график заданной производственной функции, а также графики среднего и предельного продуктов переменного фактора (труда). (5 баллов)*

2. *На основе представленных данных выведите функции общих, средних и предельных затрат фирмы, функцию индивидуального предложения фирмы и определите объем предложения при заданной цене блага. (5 баллов)*

3. *Дайте характеристику статуса фирмы на товарном и факторном рынках в представленном примере. Раскройте различия в поведении фирмы-совершенного конкурента и фирмы-монопсониста на рынке фактора. Приведите примеры подобного поведения фирм на рынке труда. (5 баллов)*

4. *Выведите функцию спроса фирмы на труд, если цена блага* $P = 6$ *и остается неизменной. Определите объем спроса на труд при* $w = 40$*. Решение сопроводите графиком. Укажите несколько факторов (не менее трех), влияющих на спрос фирмы на труд. (5 баллов)*

Решение. Данная функция является статической производственной функцией (не зависящей от времени).

По виду она похожа на функцию Коба-Дугласа –

$Q = f(k*K^a*L^b)$, где

Q - максимальный объём выпуска продукции;

K - затраты капитала;

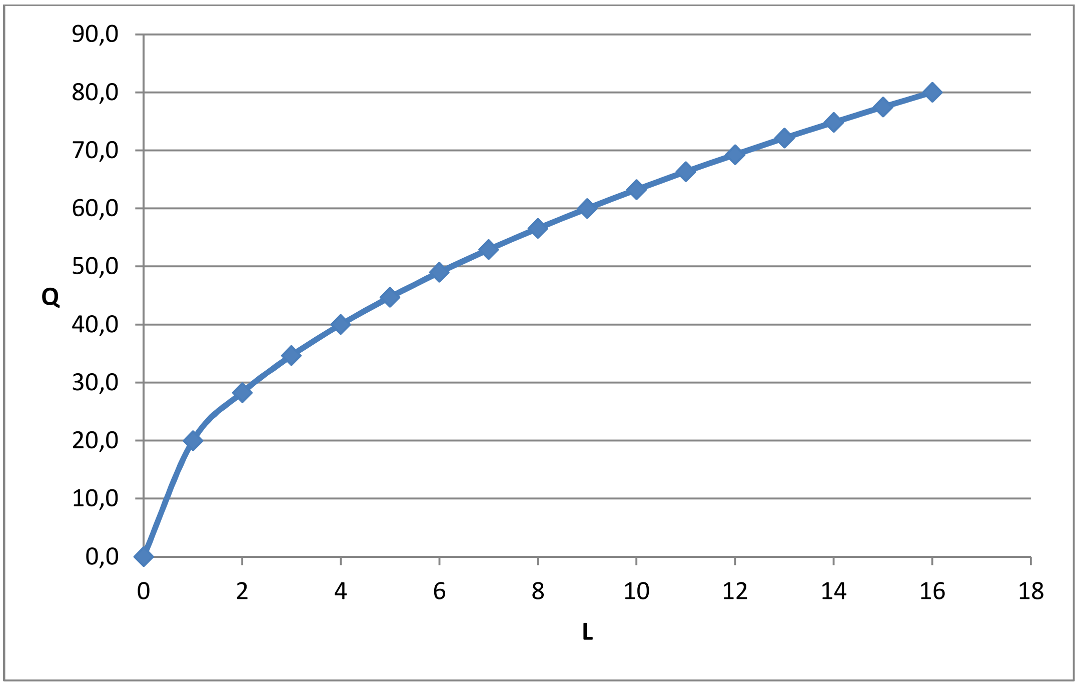
L – затраты труда;

a, b - эластичность выпуска по затратам соответствующих факторов (капитала и труда); k – коэффициент пропорциональности или масштабности в отрасли.

В нашем случае – f(x) = x, k = 20, a = 0.5, b = 0: $Q = 20L^{0,5}$

Пример подобного производства (зависящего только от одного единственного ресурса – труда) – ручная сборка мебели или еще что-то подобное.

График заданной производственной функции:



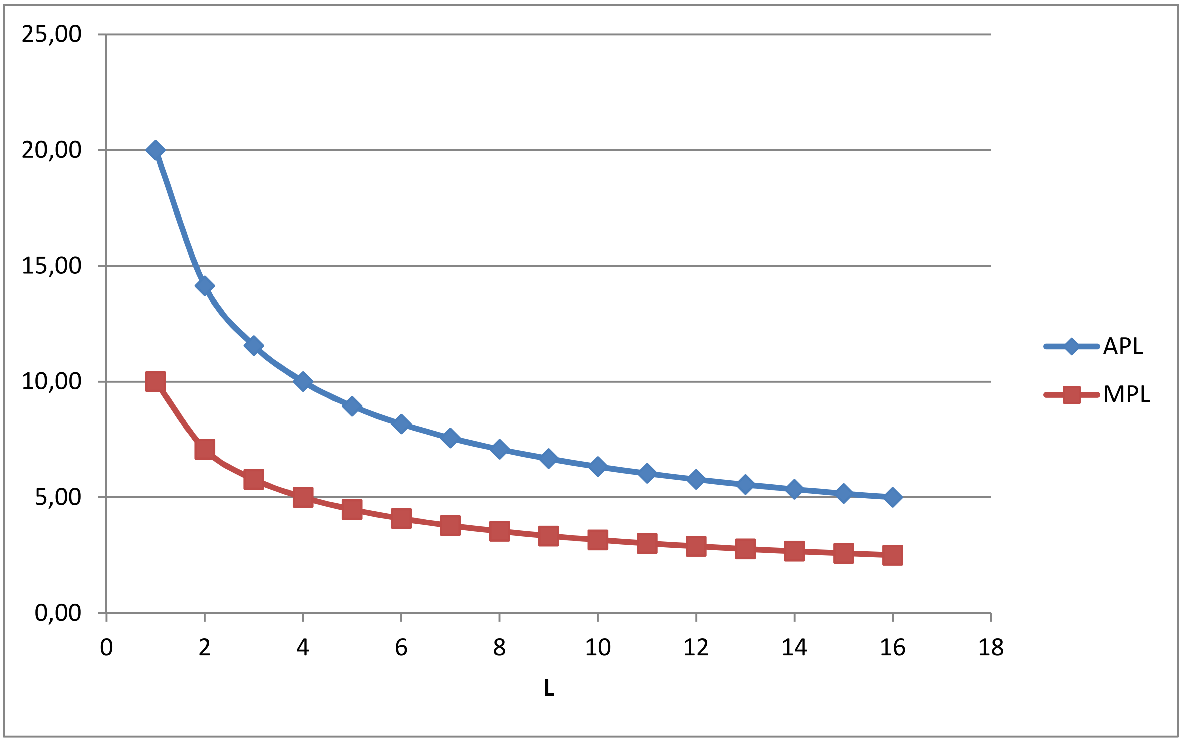
Средний продукт труда:

$$TP_L = \frac{Q}{L} = \frac{20}{L^{0.5}}$$

Предельный продукт труда:

$$MP_L = \frac{dQ}{dL} = \frac{10}{L^{0.5}}$$

Их графики:



2. На основе представленных данных выведем функции общих, средних и предельных затрат фирмы ($L = Q^2/400$):

$TC = L*w = 40L = Q^2/10$;

$AC = TC/Q = 40L/(20L^{0,5}) = 2L^{0.5} = Q/10$;

$MC = dTC/dQ = 40dL/(10L^{(-0.5)}dL) = 4L^{0.5} = Q/5$.

Поскольку компания может продавать любой объем своей продукции по постоянной цене P = 6, то это означает, что она действует на рынке совершенной конкуренции и ее линия индивидуального спроса – горизонтальная линия. Кривая предложения фирмы – часть кривой предельных издержек, которая лежит выше кривой средних переменных затрат.

Из вида кривых MC и AC заключаем, что кривая MC и будет кривой рыночного предложения фирмы или же: P = Q/5.

Объем предложения при заданной цене блага определяем из равенства:

6 = Q/5;

Q = 30.

3. Дадим характеристику статуса фирмы на товарном и факторном рынках в представленном примере:

на товарном рынке – совершенный конкурент, принимает цену как заданную;

на рынке труда – монопсонист – диктует цену покупки рабочей силы – 40.

Монопсонией называется ситуация на рынке, когда с множеством продавцов сотрудничает только один покупатель, диктуя цену, а также объем продаж. Примером может быть рынок труда: на нем фигурирует множество работников, которые продают свой труд, и предприятие – это единственный покупатель. Например – моногорода, в котором единственным покупателем труда является градообразующее предприятие.

Известно, что рынок монопсонии возникает при таких условиях:

- фирма устанавливает ставку зарплаты, а рабочие должны согласиться на такое предложение или искать другой вариант;
- одна фирма или группа фирм нанимает основную часть общего количества людей определенной профессии;

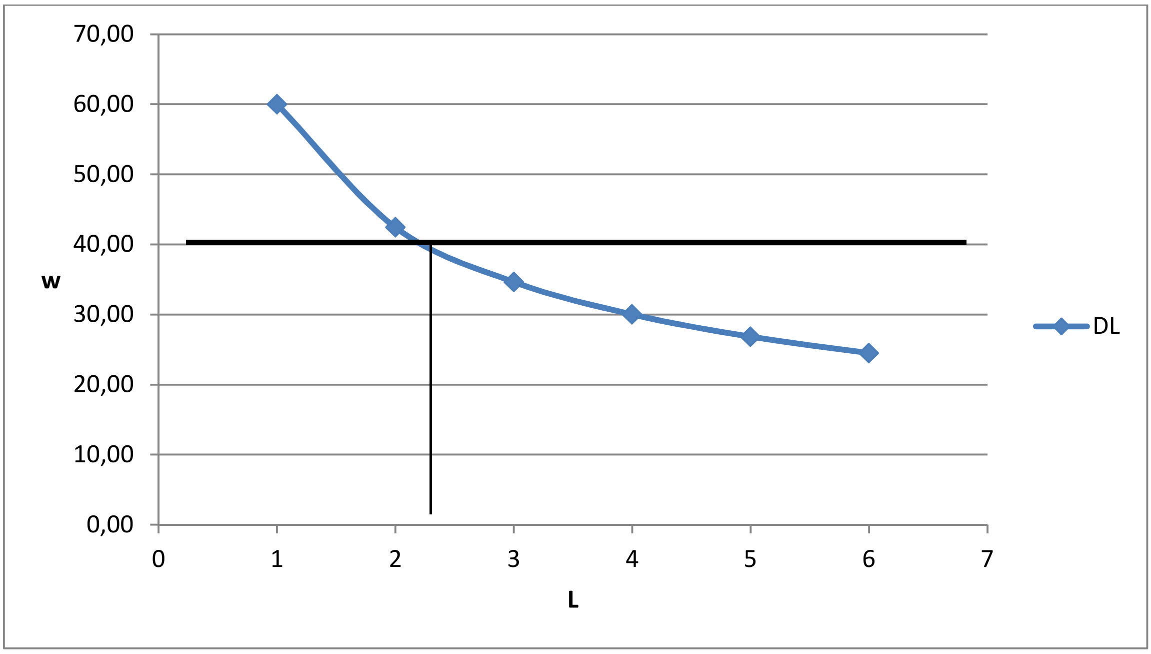
- вид труда не имеет высокого уровня мобильности (по причинам географической разобщенности, социальных условий, необходимости приобретать новую специальность);
- также монопсония на рынке труда возникает, если взаимодействуют квалифицированные рабочие, не объединенные, например, профсоюзом, и крупная фирма или группа фирм, которые могут быть нанимателем труда.

4. Для конкурентной фирмы правило оптимального привлеченного труда имеет вид: $MRP_L = MRC_L = w$.

Предельный продукт труда уже найден:

$$MP_L = \frac{dQ}{dL} = \frac{10}{L^{0.5}}$$

Функция спроса на труд: $\frac{60}{L^{0.5}} = w$ ее график:



Определим предельную производительность труда как произведение предельного продукта и цены товара:

$$MRP_L = MP_L \cdot P_{ТОВ} = \frac{10}{L^{0.5}} \cdot 6 = 40.$$

Отсюда: L = 2.25.