

Модели экономического роста

Задача 1. Экономическая система описывается производственной функцией Кобба-Дугласа

$$Y(t) = F(L(t), K(t)) = 2K^{0.75}L^{0.25}.$$

Нормы амортизации δ и коэффициент прироста трудовых ресурсов n равны 0,1.

1) Написать модель Солоу для капиталовооруженности. Определить величины нормы сбережения, объемы потребления, производительности труда и инвестирования на душу населения, соответствующие максимальному уровню потребления. Нарисовать графики.

2) Во сколько раз изменится потребление, производительность труда, капиталовооруженность, если норму сбережений, а) положить равной 0.9; б) 0.5; в) 0.25.

3) В момент времени $t = 50$ скачком меняется норма сбережений. Была а) 0.9; б) 0.5; в) 0.25, стала 0.75.

Задача 2. Экономическая система описывается производственной функцией Кобба-Дугласа

$$Y(t) = F(L(t), K(t)) = 2K^{0.5}L^{0.5}.$$

Нормы амортизации δ и коэффициент прироста трудовых ресурсов n равны 0,1.

1) Написать модель Солоу для капиталовооруженности. Определить величины нормы сбережения, объемы потребления, производительности труда и инвестирования на душу населения, соответствующие максимальному уровню потребления. Нарисовать графики.

Задача 3. Экономическая система описывается производственной функцией Кобба-Дугласа

$$Y(t) = F(L(t), K(t)) = 2K^{0.25}L^{0.75}.$$

Нормы амортизации δ и коэффициент прироста трудовых ресурсов n равны 0,1.

1) Написать модель Солоу для капиталовооруженности. Определить величины нормы сбережения, объемы потребления, производительности труда и инвестирования на душу населения, соответствующие максимальному уровню потребления. Нарисовать графики.

Задача 4. Сравнить экономические системы, описываемые производственными функциями Кобба-Дугласа с разными коэффициентами эластичности:

$$Y(t) = F(L(t), K(t)) = 2K^\alpha L^{1-\alpha}. \quad 0 < \alpha < 1.$$

где α и $1-\alpha$ – эластичность выпуска продукции соответственно по капиталу и живому труду.

Нормы амортизации δ и коэффициент прироста трудовых ресурсов n равны 0,1.

1) Написать модель Солоу для капиталовооруженности. Определить величины нормы сбережения, объемы потребления, производительности труда и инвестирования на душу населения, соответствующие максимальному уровню потребления (золотое правило). Как изменяются эти характеристики с изменением коэффициента эластичности α . Нарисовать графики.

2) Найти оптимальное значение α

Решения.

Решение задачи 1.

$k = \frac{K}{L}$ – капиталовооруженность.

$y = \frac{Y}{L} = \frac{2K^{0.75}L^{0.25}}{L} = f(k) = 2k^{0.75}$ – производительность труда.

Уравнение для изменения капиталовооруженности:

$$\frac{dk}{dt} = sf(k) - (n + \delta)k.$$

Стационарное состояние:

$$sf(k) = (n + \delta)k, \quad s2k^{0.75} = 2 * 0.1k. \text{ Отсюда получаем}$$

$$10s = k^{0.25}, \quad k = s^4 10^4 - \text{стационарное состояние.}$$

Величина потребления равна разнице между доходом и сбережениями (инвестициями):

$$c(s) = f(k^*(s)) - sf(k^*(s)) = f(k^*) - (n + \delta)k^*.$$

Дифференцируя выражение (12) по s и приравнявая нулю, найдем $\max_s c[k(s)]$.

$$\frac{dc}{ds} = \frac{df}{dk} \frac{dk}{ds} - (n + \delta) \frac{dk}{ds} = \left(\frac{df}{dk} - (n + \delta) \right) \frac{dk}{ds}.$$

Отсюда, условие максимального потребления имеет вид:

$$\left(\frac{df}{dk} - (n + \delta) \right) = 0.$$

$$\frac{df}{dk} = 2 * 0.75k^{-0.25} = 0.2.$$

Подставляя сюда значение k на стационаре, найдем искомое значение нормы сбережения:

$$2 * 0.75(s^4 10^4)^{-0.25} = 0.2.$$

Отсюда находим норму сбережения, соответствующую максимальному уровню потребления (золотому правилу накопления капитала).

$$s = 0.75.$$

Капиталовооруженность при этом будет равна:

$$k = s^4 10^4 = k = 7.5^4 = 3164.06.$$

Тогда производительность труда равна

$$y = f(k) = 2k^{0.75} = 2 * 7.5^3 = 843,75$$

Объем сбережений (инвестиций) на душу населения:

$$I = sf(k) = 0.75 * 843,75 = 632.8.$$

Величина потребления на душу населения

$$C = (1 - s)f(k) = 0.25 * 843,75 = 210,94.$$

Решение задачи 4.

$k = \frac{K}{L}$ – капиталовооруженность.

$y = \frac{Y}{L} = \frac{2K^\alpha L^{1-\alpha}}{L} = f(k) = 2k^\alpha$ – производительность труда.

Уравнение для изменения капиталовооруженности:

$$\frac{dk}{dt} = sf(k) - (n + \delta)k.$$

Стационарное состояние:

$sf(k) = (n + \delta)k$, $s2k^\alpha = 2 * 0.1k$. Отсюда получаем

$$10s = k^{1-\alpha}, \quad k = 10s^{\frac{1}{1-\alpha}} - \text{стационарное состояние.}$$

Условие максимального потребления при заданном α имеет вид:

$$\left(\frac{df}{dk} - (n + \delta) \right) = 0.$$

$$\frac{df}{dk} = 2\alpha k^{\alpha-1} = 0.2.$$

Подставляя сюда значение $k = 10s^{\frac{1}{1-\alpha}}$ на стационаре, найдем искомое значение нормы сбережения:

$$2\alpha(10s)^{-1} = 0.2$$

$$s = \alpha.$$

Капиталовооруженность при этом будет равна:

$$k = 10 \alpha^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Тогда производительность труда равна

$$y = f(k) = 2 * (10 \alpha)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Объем сбережений (инвестиций) на душу населения:

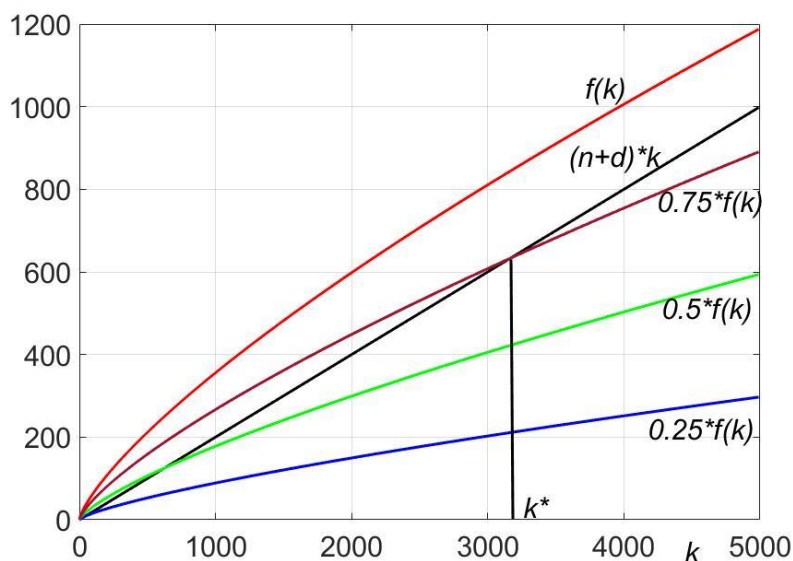
$$I = sf(k) = 2 * (10 \alpha)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Величина потребления на душу населения

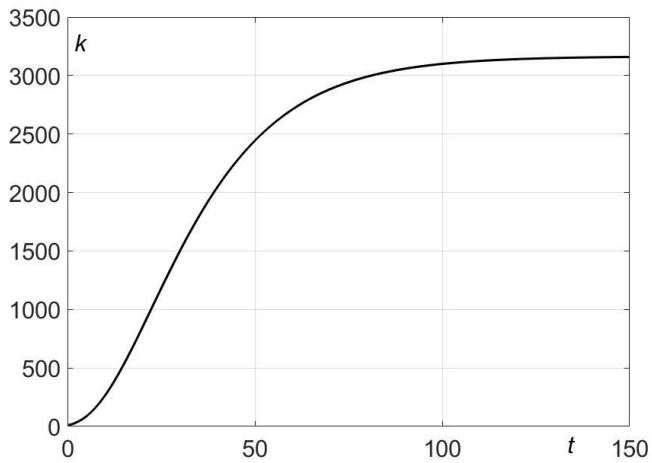
$$C = (1 - s)f(k) = 2(1 - \alpha)(10 \alpha)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Пробегая с некоторым шагом h_α весь интервал изменения $\alpha \in (0,1)$, нарисовать график изменения $C(\alpha)$.

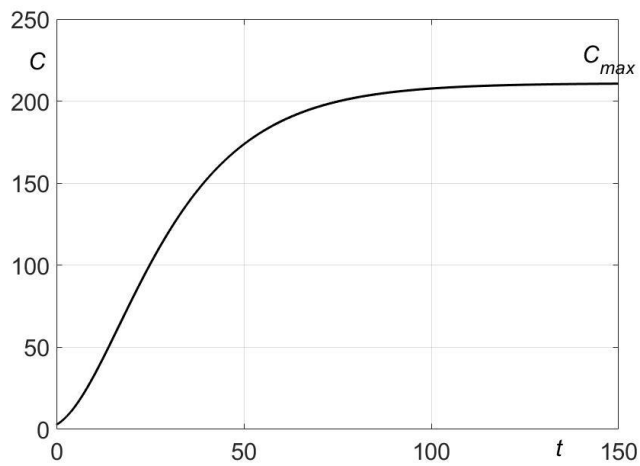
Можно ли сделать вывод, что для повышения объема производства и уровня жизни населения необходимо менять структуру производственной функции, увеличивая зависимость объема производства от вложений капитала – т.е., увеличивая коэффициент эластичности α по капиталу K . Как отмечено выше, это связано с автоматизацией производства и уменьшением доли неквалифицированного ручного труда.



Графическое решение задачи 1. k^* - стационарная точка.

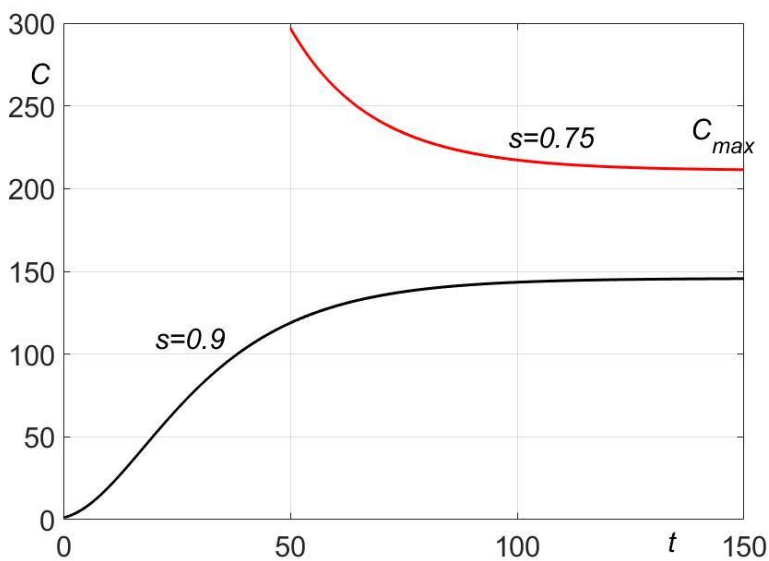


Зависимость $k(t)$

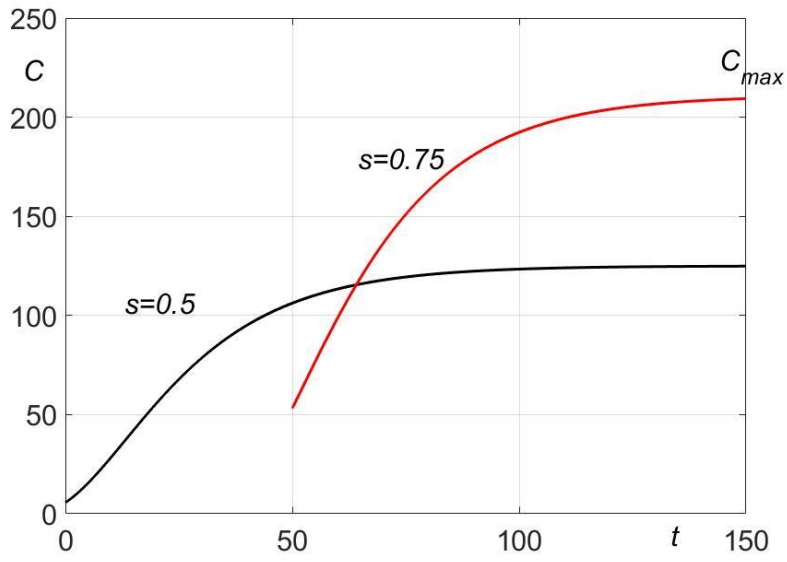


Зависимость $c(t)$

Динамика изменения потребления после изменения нормы s : **а)** начальная норма сбережения выше максимальной s_g ; **б)** начальная норма сбережения ниже максимальной s_g



а)



θ)